Plus symétrique
que la sphère

Barry MAZUR

Si la sphère nous apparaît l'objet symétrique par excellence, du point de vue des pavages symétriques, le plan hyperbolique est nettement plus riche. L'avantage de la géométrie hyperbolique est sur ce point patent. La symétrie des pavages est par ailleurs un outil puissant qui permet la résolution de problèmes variés, du simple théorème de Pythagore au grand théorème de Fermat.

Cet article est une louange de la symétrie, des symétries les plus simple aux constellations les plus complexes de symétries. Par exemple, lorsque l'on étudie une égalité de polynômes portant sur les nombres complexes (des nombres de la forme $a + ib$, où a et b sont des nombres réels et i un nombre tel que $i^2 = -1$), il est souvent utile de remarquer que le remplacement de toutes les occurrences de i par $-i$ préserve l'égalité. La transformation $i \rightarrow -i$ est une symétrie du plan complexe. En effet, cette symétrie garantit que les solutions de n'importe quel problème exprimé entièrement en termes de nombres rationnels ou réels sont préservées par la symétrie.

Parfois, en l'absence de symétrie apparente, une petite modification de point de vue peut révéler une interprétation cachée, comme dans la révolution copernicienne. Les cas où il y a potentiellement une infinité de symétries sont très avantageux, si l'on peut en tirer parti. Comme exemple initial, considérons un pavage infini et son motif de base *(voir les figures dans l'encadré page suivante)*. En réordonnant les éléments géométriques du motif de base, on parvient à la démonstration classique du théorème du Pythagore. Plus amusant : comment utiliser la répétition infinie du motif de base pour obtenir une seconde preuve de ce célèbre théorème ? Avant de lire la réponse dans le texte de l'encadré, tentez de trouver cette démonstration ! Ce que je trouve troublant dans cette seconde démonstration est qu'une déduction sur une partie finie du plan puisse utiliser de manière aussi intime la totalité du plan euclidien à travers les répétitions des motifs et des symétries de translation. Ces simples symétries de translation sont puissantes. Elles ne sont peut-être pas l'« effrayante symétrie » évoquée par William Blake, mais certainement pas les « arabesques fatigantes » auxquelles James Joyce fait allusion.

Ayant entrevu la puissance des symétries, nous allons nous y plonger plus avant. Mais il nous faudra d'abord faire un détour par les modifications drastiques qui se sont opérées, en l'espace de 150 ans, dans la nature même de ce que le mathématicien entend par géométrie. Muni de ces conceptions modernes, nous pourrons définir les « géométries fondamentales », notamment la géométrie hyperbolique, dont nous

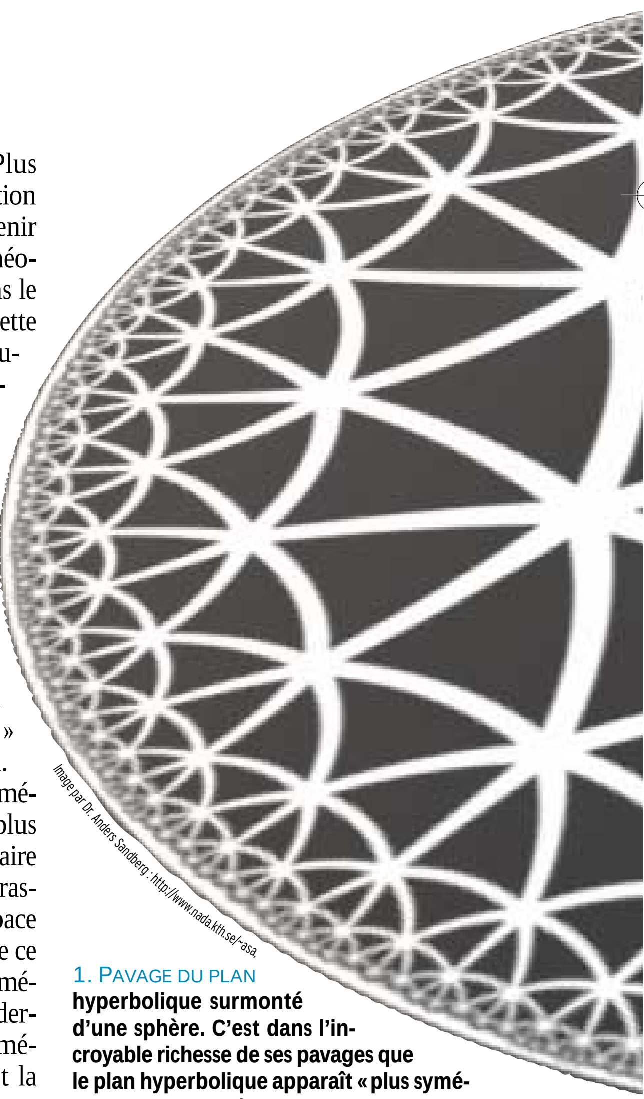


Image par Dr. Anders Sandberg : http://www.nada.kth.se/~asa,

1. PAVAGE DU PLAN **hyperbolique surmonté d'une sphère. C'est dans l'incroyable richesse de ses pavages que le plan hyperbolique apparaît « plus symétrique que la sphère ».**

mesurerons la puissance en termes de pavage et de symétrie.

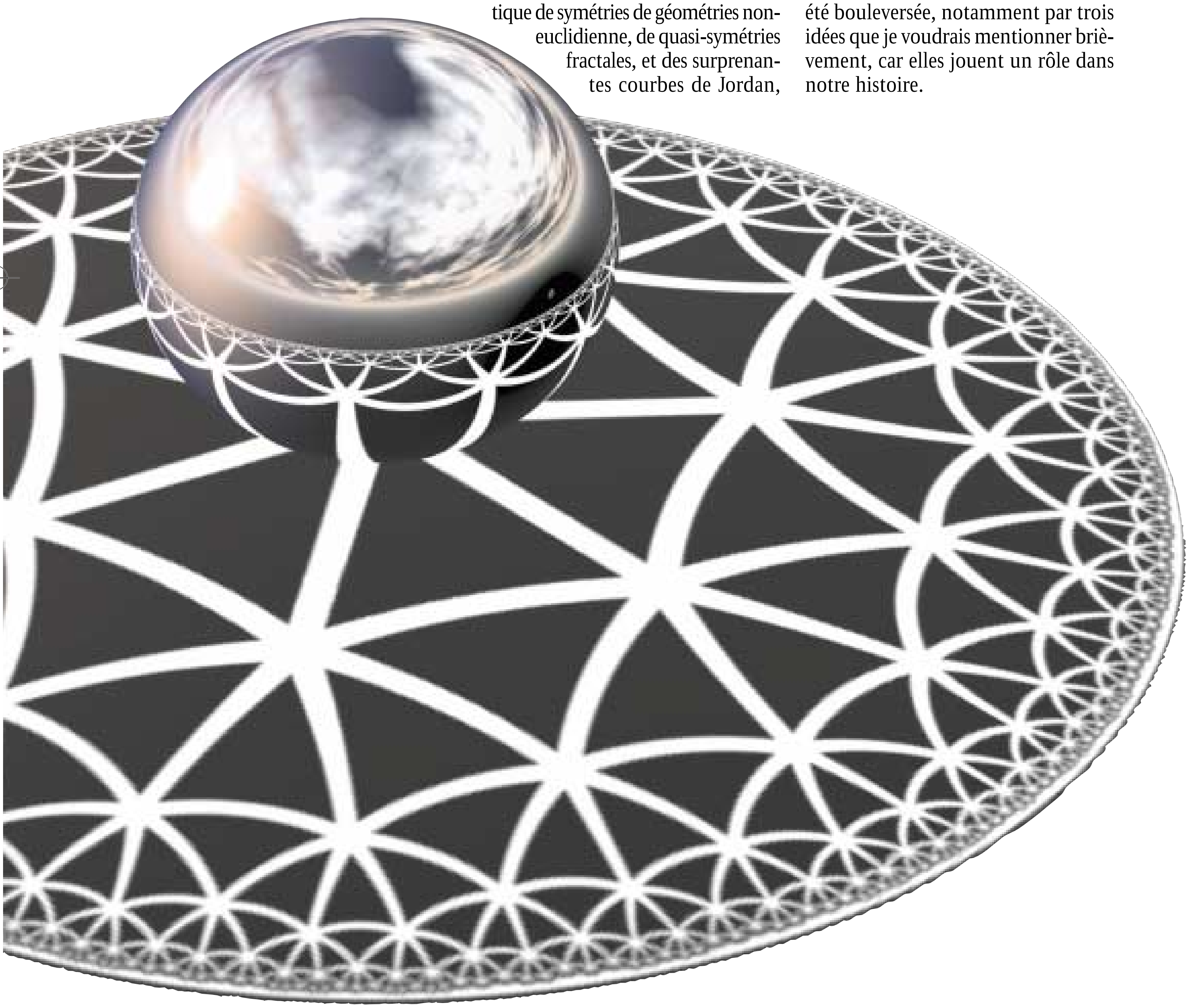
Géométrie nouvelle

Si vous n'êtes pas familiers des mathématiques de la symétrie, deux magnifiques livres méritent le détour : l'ouvrage classique d'Herman Weyl *Symétrie et mathématique moderne* (*Symmetry*, Princeton University Press 1952 pour la première édition) et le récent *Indra's Pearls* (D. Mumford, C. Series et D. Wright, Cambridge University Press, 2002), qui deviendra certainement un classique. Les différences d'approches de ces deux livres, écrits à un demi-siècle d'intervalle, révèlent comment les mathématiciens ont modifié leur manière d'expliquer leurs travaux pour un public plus large que les seuls professionnels. Weyl utilise des concepts de base de la symétrie, commençant avec les symétries bilatérales, pour réexaminer les grandes œuvres d'art, comme les bas-reliefs babyloniens, ou les formes de la nature, comme la méduse à symétrie octogonale *(voir la figure 3)*.

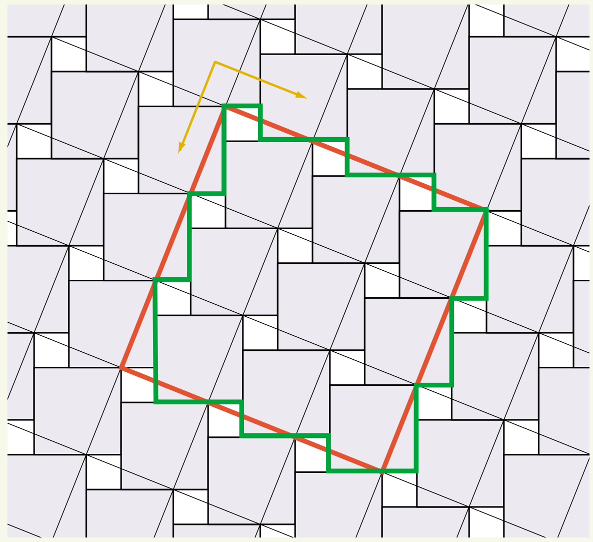
Bien que l'objectif de Weyl soit d'examiner le vaste concept mathématique de symétrie, les exemples qu'il utilise sont tous tirés du répertoire des symétries euclidiennes. Par contraste, *Indra's Pearls* examine et offre des impressions visuelles d'un monde mathématique de symétries de géométries non-euclidienne, de quasi-symétries fractales, et des surprenantes courbes de Jordan, que l'on peut reproduire aujourd'hui précisément grâce aux superordinateurs. Plus spécifiquement, cet ouvrage nous livre quantité d'exemples des symétries en géométrie hyperbolique, à propos desquelles l'un de ces fondateurs (Janos Bolyai) écrivait « j'ai découvert des choses si merveilleuses que j'en fus étonné… À partir de rien, j'ai créé un nouveau monde étrange ».

Trois grandes idées de la géométrie

En à peine cent ans, entre la dernière partie du XVIIIe siècle et le début du XXe siècle, la conception même de ce que nous entendons par *géométrie* a été bouleversée, notamment par trois idées que je voudrais mentionner brièvement, car elles jouent un rôle dans notre histoire.

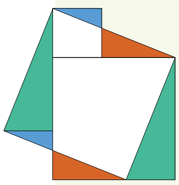


PYTHAGORE PAR LES PAVAGES



Voici comment procéder pour la démonstration non conventionnelle du théorème de Pythagore. Imaginez que notre motif fondamental *(à droite)* soit la brique de base d'un pavage de l'intégralité du plan. En faisant ce pavage, nous avons pavé le plan deux fois : une première fois par ce que nous nommerons les carrés penchés (lignes fines, supposés de longueur unité), et une seconde fois par un motif de grands et de petits carrés, dont les côtés sont horizontaux et verticaux (lignes plus épaisses). Les transformations qui conservent le pavage sont les translations dans le sens des flèches superposées à la figure (ou de sens opposé).

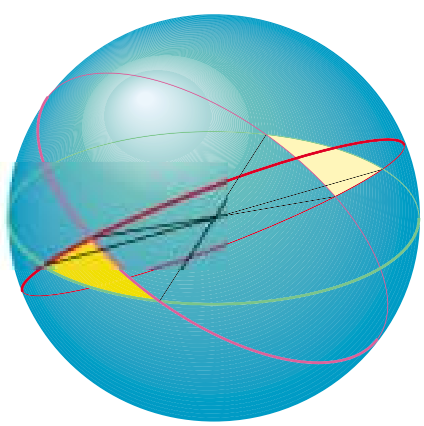
Pour prouver que la somme des carrés droits est égale à celle des carrés penchés (notre théorème de Pythagore, à peine camouflé), considérons d'une part une surface *T* de n^2 carrés penchés *(contour rouge)*, et d'autre part une surface *U* constituée de n^2 petits carrés droits et de n^2 grands carrés droits *(contour vert)*. L'aire de *U* est comprise entre celle de *T* et celle d'un carré d'une largeur qui diffère de la largeur de *T* d'une constante *c*. Autrement dit $(n-c)^2 \leq \text{aire}(U) \leq (n+c)^2$. En divisant cette inégalité par n^2 et en faisant tendre *n* vers l'infini, on trouve que la valeur absolue de la différence d'aire entre *U* et *T* tend vers zéro. Cela signifie donc que les aires de *T* et *U* sont égales.



Ainsi, dans cette preuve, une déduction sur une partie finie du plan utilise la totalité du plan euclidien à travers la répétition de motifs et les symétries de translation. Les lecteurs trouveront certainement une démonstration plus courte de ce théorème en considérant uniquement une portion finie de ce plan (c'est d'ailleurs la preuve classique, il suffit de réarranger des portions du plan sur la figure de gauche), mais j'ai proposé cette démonstration plus longue comme une utilisation curieuse et amusante des pavages infinis.

La distinction entre propriétés intrinsèques et propriétés extrinsèques

Cette distinction avait déjà été évoquée par Emmanuel Kant dans un chapitre de ses *Prolégomènes à toute métaphysique future* (1783). Il y souligne que toute mesure intrinsèque que vous pouvez faire sur un triangle sphérique général aura exactement les mêmes valeurs que les mesures analogues faites sur le triangle qui se trouve aux antipodes de la sphère *(voir la figure 2)*, alors qu'il n'existe pas de déplacement dans le plan euclidien qui fasse correspondre un triangle à son collègue des antipodes. Ainsi, il y a une distinction extrinsèque entre les deux triangles si nous imaginons qu'ils sont positionnés dans une géométrie euclidienne à trois dimensions, mais aucun aspect de leur géométrie purement intrinsèque ne se distingue l'une de l'autre.
Cette distinction est du même type que celle qui peut être faite entre un gant droit et un gant gauche d'une même paire. La chiralité est une propriété extrinsèque du gant, mais elle ne se distingue par de la géométrie interne de la surface du gant (elle est donc non intrinsèque). De la même manière, une fourmi (doué d'une certaine curiosité géométrique) se déplaçant sur un petit morceau de plan ne verra pas de différence dans son environnement géométrique par rapport à une fourmi se déplaçant sur un cylindre et ce, quelle que soit la différence que nous percevions de notre point de vue de pique-niqueur ! Il est important d'avoir à l'esprit cette distinction entre propriétés intrinsèque et extrinsèque lorsque nous traiterons de la géométrie hyperbolique et des différents « modèles » qu'elle offre. De nombreuses caractéristiques de nos modèles seront en effet seulement des propriétés extrinsèques d'un modèle particulier et non des propriétés intrinsèques de la géométrie sous-jacente que nous modéliserons.



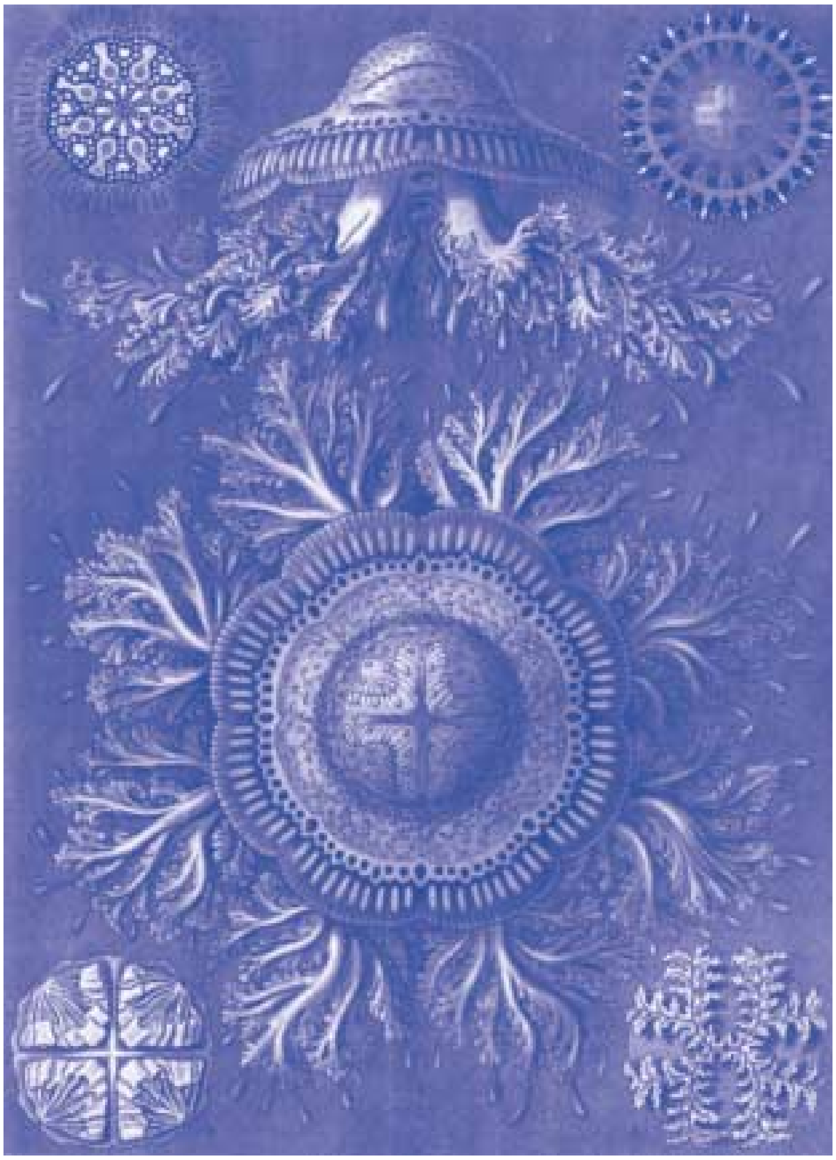
2. UN TRIANGLE SPHÉRIQUE QUELCONQUE **et son triangle antipodal ont exactement les mêmes mesures, bien qu'aucun déplacement sur la sphère (rotation par exemple) ne puisse faire correspondre l'un à l'autre.**

Les symétries d'une géométrie précèdent la géométrie

Au cours de la dernière partie du XIX^e siècle, notre compréhension de la manière dont on peut « fabriquer » une géométrie a été radicalement modifiée. Avant cette révolution, l'attitude qui prévalait envers la géométrie consistait d'abord à établir, d'une manière directe, la géométrie avec laquelle vous vouliez travailler. Pour ce faire, il était nécessaire de décrire, ou mieux de définir rigoureusement, ce que sont les « droites », ce que signifie « angle » et tout autre caractéristique géométrique pertinente de votre géométrie. C'est seulement après que cette construction a été faite, que vous pouviez étudier de manière systématique le « groupe de symétrie de la géométrie », c'est-à-dire l'ensemble des transformations qui, appliquées à un ensemble de point de votre géométrie, préserve les caractéristiques géométriques que vous aviez laborieusement définies.

La révolution qui s'est produite a consisté à nous apprendre que, dans des contextes précis, lorsque notre géométrie est « suffisamment symétrique », on pouvait inverser la procédure. Ainsi, on pouvait d'abord stipuler un groupe de transformation destiné à jouer le rôle d'un groupe de symétrie dans notre géométrie ; ensuite, en utilisant seulement le vocabulaire de ces transformations, préciser la « géométrie » définie comme la donnée du groupe de transformation opérant sur un espace. Cette révolution est aujourd'hui nommée « programme d'Erlangen », car elle a été élaborée essentiellement par le mathématicien autrichien Felix Klein à l'Université d'Erlangen, en Bavière, dans les années 1870.

Le credo de ce programme est qu'une structure algébrique presque pure (c'est-à-dire les transformations destinées à être le répertoire des symétries d'une géométrie) détermine cette géométrie. Mieux encore, cette structure fournit un moyen puissant de comprendre cette géométrie. Si vous regardez la définition du mot « symétrie » dans un dictionnaire, vous trouverez que l'une de ses acceptions est « opération ou transformation qui laisse quelque chose inchangé ». De fait, c'est grossièrement ce sens que nous avons adopté dans notre utilisation du mot symétrie. Après la révolution d'Erlangen, le « quelque chose » qui est effectivement laissé inchangé par toutes les symétries que nous autorisons est, par définition, la géométrie à laquelle nous nous intéressons.



3. La Discomedusa, **une méduse qui possède une symétrie octogonale. Ce dessin extrait de l'ouvrage d'Ernst Haeckel *Kunst der Natur* (18YY) nous montre l'intérêt des savants du XIX^e siècle pour la symétrie.**

Toute géométrie lisse peut être approchée localement par la géométrie euclidienne

Muni de l'information qui vous permet de calculer les longueurs infinitésimales et à l'aide de l'analyse standard, vous êtes en mesure de calculer les longueurs de n'importe quel arc. Plus précisément, vous pouvez construire et manipuler des géodésiques, les courbes qui jouent le rôle de « lignes droites » dans la géométrie. Par définition, les géodésiques sont des courbes lisses qui relient un point à un point voisin par un arc de longueur minimale. Le type d'information que vous devez posséder pour faire ces calculs est la « métrique riemannienne », un outil analytique qui décrit la géométrie intrinsèque d'une surface, indépendamment de ses symétries.

Ayant à l'esprit ces idées, nous pouvons poursuivre notre voyage géométrique, en explorant les surfaces géométriques classiques.

Les surfaces géométriques très symétriques

De manière classique, on distingue trois surfaces très symétriques : le plan euclidien, la sphère et le plan hyperbolique. Cette insaisissable troisième surface est aussi nommée plan de Bolyai ou de Lobatchevsky, en l'honneur de deux de ses découvreurs. Ces trois surfaces (ou géométries) se distinguent de manière élégante par le fait qu'elles satisfont toutes aux postulats standards de la géométrie euclidienne, excepté pour le subtile cinquième postulat qui concerne l'existence et l'unicité des droites passant par un point et parallèle à une droite donnée.

Il est remarquable que ces géométries soient caractérisées par leur comportement vis-à-vis de ce postulat : étant donné une droite L et un point P hors de cette droite, la géométrie euclidienne garantit l'existence d'une unique droite qui passe par P parallèle à L ; en géométrie sphérique, il n'y a pas de droite qui passe par P parallèle à L (en fait, toutes les « droites » de la géométrie sphérique sont des grands cercles tous sécants entre eux) ; en géométrie hyperbolique, nous avons l'assurance que de nombreuses droites passent par P et sont parallèles à L.

Toutes ces surfaces sont « très symétriques » dans le sens où chacune admet une gamme de symétries caractérisées par trois paramètres qui préserve toutes les propriétés intrinsèques de leur géométrie. Pour le plan euclidien et pour la sphère, qui sont des structures familières, nous pouvons visualiser directement les trois paramètres distincts de leurs symétries *(voir la figure 4)*. En revanche, pour le plan hyperbolique, nous aurons besoin d'une discussion plus élaborée afin d'en appréhender les structures géométriques fondamentales.

La géométrie du plan et celle de la sphère sont liées par le fait que chacune peut être représentée comme contenues dans un espace euclidien tridimensionnel. Leurs symétries résultent de symétries de la géométrie tridimentionnelle euclidienne ambiante, ce qui facilite leur visualisation. Cet état plaisant n'est plus vrai pour notre troisième surface, le plan hyperbolique. Certes, on peut représenter certains aspects du plan hyperbolique en géométrie euclidienne – et c'est ce que nous allons faire ici – mais, avec de telles tentatives, d'autres aspects du plan hyperbolique seront perdus. Cette complication s'apparente au problème auquel furent confrontés Gerhardus Mercator et les autres dessinateurs de cartes lorsqu'ils tentèrent de représenter une géométrie sphérique (celle du globe terrestre) dans le plan euclidien. Dans les quelques « représentations » standards de la géométrie hyperbolique que nous présenterons, nous nous efforcerons de souligner leurs vertus et leurs défauts.

Première représentation du plan hyperbolique : la moitié supérieure du plan euclidien (que nous nommerons par la suite représentation A). On fait correspondre le plan hyperbolique au demi-plan complexe *(voir la figure 5a)*. Cette représentation a l'avantage de conserver les angles. En revanche les longueurs sont distordues. Les « droites » de cette géométrie (ou les géodésiques) apparaissent alors de deux manières : des demi-verticales ou des demi-cercles. Cette distinction est toutefois extrinsèque à la géométrie hyperbolique ; c'est un artefact de cette représentation euclidienne particulière.

Dans cette représentation, les symétries du plan hyperbolique sont les transformations :

$z \to (az + b)/(cz + d),$

où a, b, c et d sont quatre nombres réels tels que $ad - bc = 1$ et z est un nombre complexe du demi-plan supérieur. Ainsi, les symétries du plan hyperbolique sont paramétrées par quatre nombres qui doivent satisfaire une relation unique, de sorte que l'ensemble des symétries hyperboliques est bien défini, comme pour la géométrie euclidienne ou sphérique, par un ensemble de trois paramètres continus.

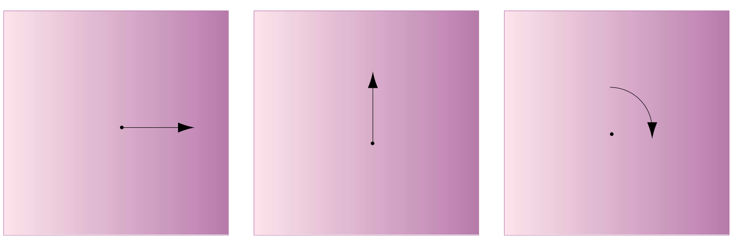
La symétrie de la géométrie hyperbolique qui « fait tourner » un plan hyperbolique de 180 ° autour d'un point fixe est aussi amusante qu'instructive. Par exemple, considérons la « ligne droite » représentée par le demi-cercle de rayon unité et le point i sur ce demi-cercle. La correspondance

$z \to -1/z$

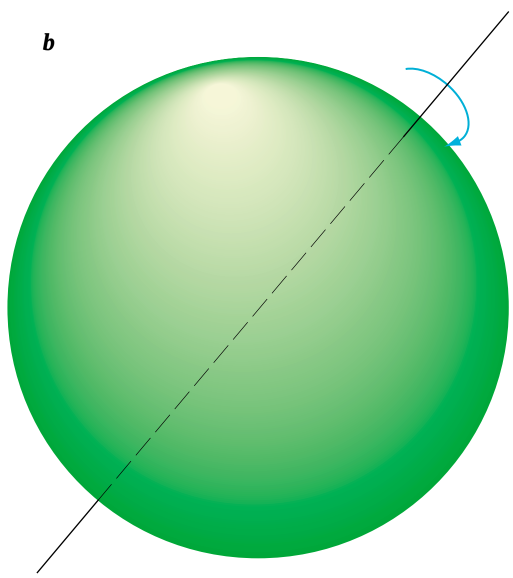
est une symétrie du plan hyperbolique qui fixe le point i et « tourne » le plan hyperbolique d'un angle π autour du point i : cette transformation fait correspondre le demi-cercle de rayon unité à lui-même et envoie les points hors du demi-cercle à l'intérieur et réciproquement *(voir la figure 5a)*. En fait, cette transformation fait correspondre n'importe quelle « droite » hyperbolique contenant i à elle-même, le faisant tourner d'un angle de π.

La seconde représentation habituelle du plan hyperbolique est le modèle de Beltrami-Poincaré (représentation B). Ce modèle représente le plan hyperbolique comme un disque de rayon unité dans le plan euclidien considéré comme le disque de rayon unité dans le plan complexe *(voir la figure 5b)*. Dans cette représentation, les « droites » sont des arcs de cercles perpendiculaires au bord. Comme dans le modèle A, les angles de la géométrie hyperbolique sont conformes aux

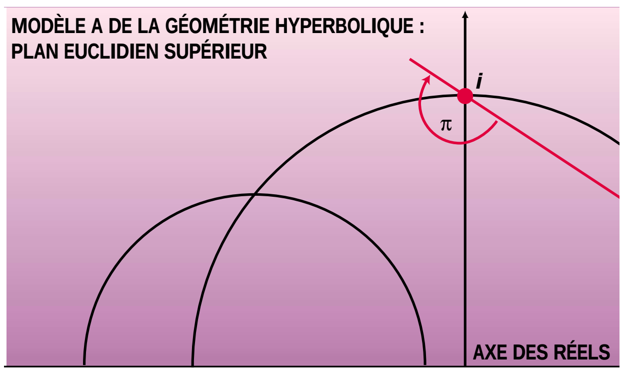
a

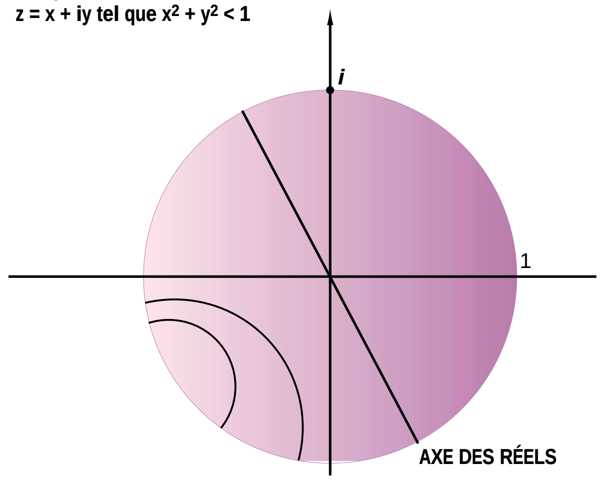


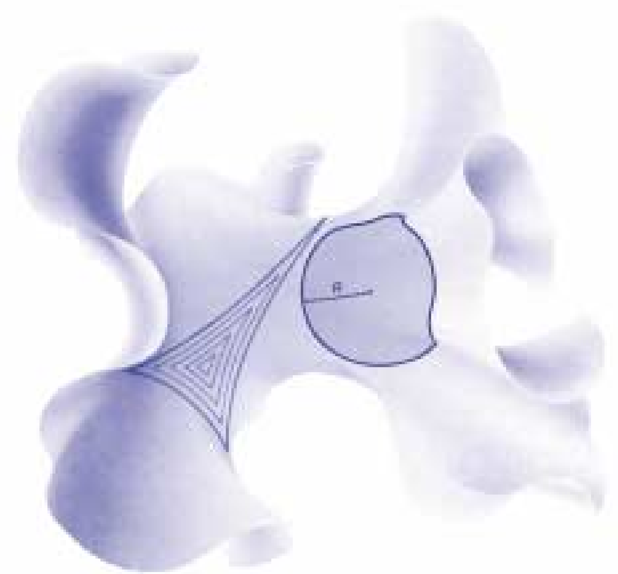
b



4. DANS LE PLAN EUCLIDIEN, **il y a trois mouvements indépendants : la translation Est-Ouest, la translation Nord-Sud et la rotation *(a)* ; en combinant ces trois opérations fondamentales, nous obtenons une gamme continue tridimensionnelle de symétries de la géométrie euclidienne. Pour la sphère, une rotation autour de n'importe quelle diagonale et de n'importe quel angle conserve les structures *(b)*. Comme, il y un continu bidimensionnel de diagonales et un choix libre de l'angle de rotation, on obtient aussi une gamme continue de paramètres qui régit les symétries de cette géométrie.**







5. LES TROIS REPRÉSENTATIONS POSSIBLES DU PLAN HYPERBOLIQUE. **Dans le modèle A, le plan est représenté par le plan complexe supérieur. Les lignes droites sont soit des demi-verticales, soit des demi-cercles. La symétrie $z \rightarrow -1/z$ est la transformation qui fixe le point i et tourne n'importe quelle droite passant par i d'un angle π. Dans le modèle B, le plan hyperbolique est représenté par un disque de rayon unité. Les lignes droites de la géométrie hyperbolique sont les diagonales ou les arcs de cercles qui rencontrent la frontière transversalement (avec un angle de $\pi/2$). Ces deux représentations conservent les angles, mais pas les distances. Le modèle C consiste à plonger le plan hyperbolique dans l'espace euclidien tridimensionnel. Sur cette surface, qui n'est qu'une partie du plan hyperbolique par nature infini, les mesures sont identiques à celles du plan hyperbolique, par exemple toutes les mesures que l'on pourrait faire sur un triangle ou un cercle : cette représentation à l'avantage de conserver les distances et les angles. En revanche, les symétries ne sont pas apparentes.**

angles euclidiens, mais, de nouveau, les longueurs sont distordues.

Offrons une troisième représentation d'au moins une partie du plan hyperbolique : une surface dans l'espace euclidien tridimensionnel. Cet espace, qui est l'espace usuel, a la bonne propriété que ni les longueurs ni les angles ne sont distordues. Le lecteur est invité à contempler le modèle C *(voir la figure 5c)* qui ressemble à mes yeux à une curieuse feuille de laitue bouclée. Cette fois, les angles et les longueurs de la géométrie hyperboliques sont conformes aux angles et longueurs de la géométrie euclidienne. Le problème est que nous représentons ainsi seulement une partie du plan hyperbolique, car ce dernier est infini. Plus dérangeant encore, les symétries de la géométrie hyperbolique sont très difficiles à visualiser dans cette représentation. En particulier, ces symétries ne sont pas, en général, obtenues en faisant des symétries dans l'espace euclidien ambiant qui préserve la surface.

À l'intérieur du groupe continu des symétries de ces géométries, se trouvent des groupes discrets de symétries des pavages symétriques autorisés par ces géométries. C'est dans cette voie que le plan hyperbolique excelle, car la géométrie hyperbolique autorise un assortiment extraordinairement riche de magnifiques pavages. Du point de vue de la théorie des groupes (et avec une légère modulation selon la manière de compter), il y a 17 pavages symétriques différents du plan euclidien (pour leur description, on pourra se reporter au livre de Weyl). Par contraste, le plan hyperbolique a une réserve non exhaustive (en particulier infinie) de pavages différents. Le plan hyperbolique est « plus symétrique que la sphère ou que le plan euclidien », dans le sens où l'infinité de pavages de plan hyperbolique fait intervenir des groupes plus intéressants (et qui sont décrits de manière moins simple en raison de leur immense variété) que les groupes de symétries des pavages de la sphère (également infini) ou que les 17 groupes de symétrie du plan euclidien. Par exemple, la figure 6 représente un tel pavage de la géométrie hyperbolique figurée à l'aide des modèles A et B.

Par contraste, la figure 7 illustre un pavage différent du plan hyperbolique par des triangles dont les angles intérieurs sont $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/7$ (en géométrie hyperbolique, la somme des trois angles intérieurs d'un triangle est toujours strictement inférieure à 2π). Tous ces pavages sont symétriques dans le sens où il existe des symétries hyperboliques qui conservent le pavage, faisant correspondre chaque pièce du pavage à une autre. En particulier, malgré les différences d'apparences entre les modèles A et B, tous les triangles qui apparaissent dans n'importe laquelle de ces trois figures sont congruents en géométrie hyperbolique : on peut trouver des transformations de la géométrie qui fait correspondre n'importe quel des triangles à n'importe quel autre.

Symétries des théories, miroirs et cachées

Jusqu'ici, nous avons examiné des symétries que l'on peut visualiser à l'aide de représentations euclidiennes imparfaites. Aujourd'hui, le simple mot de symétrie a été étendu et éprouvé de manière impitoyable par les mathématiciens et physiciens. Il y a les symétries qui projettent des théories entières sur d'autres théories (externe), ou sur elles-mêmes (internes). D'autres symétries réfléchissent une théorie ou une partie de théorie comme l'image dans un miroir d'une autre théorie. L'exemple classique en est le principe de dualité de la géométrie projective où, en deux dimensions par exemple, si vous échangez les mots et les phrases de la manière suivante : *point* ↔ *droite*, *point appartenant à* ↔ *droite passant par*, *points alignés* ↔ *droites concourantes*, *point d'intersection* ↔ *droite passant par deux points*, les théorèmes vrais sont transformés en théorèmes vrais. Autrement dit, on peut montrer de nouveaux théorèmes, pratiquement sans démonstration, à l'aide de cette dualité.

Les exemples modernes de symétries qui concernent des théories entières plutôt que seulement les pavages abondent. Ces symétries vont du magistral programme de Langlands qui tente de faire le lien entre la théorie de représentation des groupes et la théorie des nombres (et dont un résultat connecté valut la médaille Fields au mathématicien français Laurent Lafforgue en 2002), jusqu'aux développements actuels des symétries miroirs qui connectent la géométrie algébrique à la géométrie symplectique. Toutefois, dans mon opinion, aucune discussion de la symétrie ne serait complète sans une mention des magnifiques symétries cachées qui jouent un rôle fondamental en théorie des nombres.

Pour tenter de saisir ces symétries cachées, un exemple ancien particulier et un autre plus récent et plus général nous guideront. Tous deux sont étonnants par leur importance et tous deux dépendent des symétries infinies des pavages de la géométrie hyperbolique.

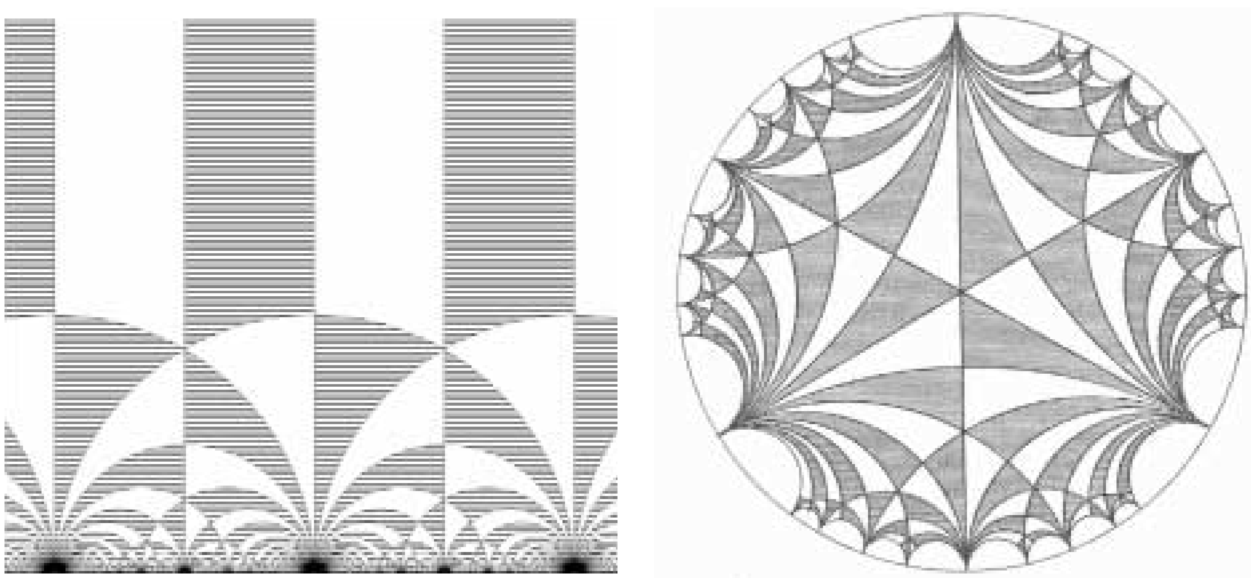
La représentation des entiers comme somme de carrés.

Un nombre premier impair p peut être exprimé comme la somme de deux carrés : $p = a^2 + b^2$ si et seulement si p est de la forme $4k + 1$ (l'expression est unique si $0 < a < b$). Un fameux théorème dû à Louis de Lagrange garantit que n'importe quel entier positif peut être exprimé comme la somme de quatre carrés parfaits.

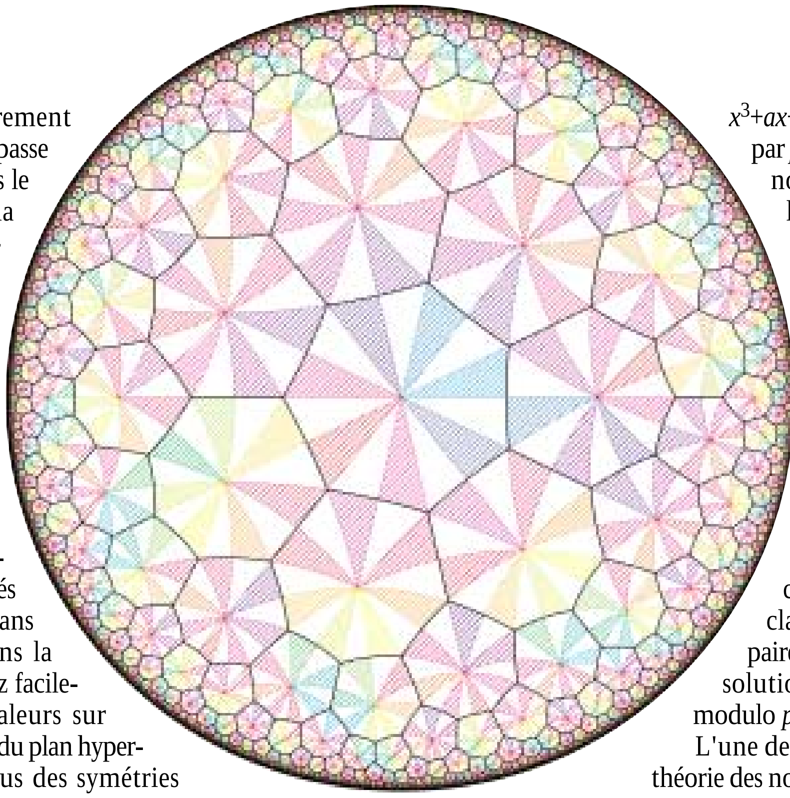
Ces deux théorèmes classiques et admirablement précis font aujourd'hui partie d'une mosaïque plus vaste : pour n'importe quelle paire d'entiers positifs r et N, il est traditionnel d'étudier la fonction de comptage :
$A_r(N)$ = le nombre de r-uplets des entiers $(n_1, n_2, ..., n_r)$ tel que $n_1^2 + n_2^2 + ... + n_r^2 = N$. On rassemble ensuite cette information arithmétique en formant la fonction génératrice :
$\Theta_r(z) = 1 + A_r(1)\, e^{\pi iz} + A_r(2)\, e^{2\pi iz} + ... + A_r(N)\, e^{N\pi iz} + ...$

Il est relativement aisé de constater que $\Theta_r(z)$ est une série qui converge pour les nombres complexes $z = x + iy$ avec $y > 0$ (c'est-à-dire lorsque z appartient au demi-plan supérieur). En effet, dans ce cas, chaque terme en $e^{N\pi iz}$ devient exponentiellement petit à mesure que N augmente. Ainsi, nous pouvons considérer que $\Theta_r(z)$ est une fonction du plan hyperbolique, en pensant la géométrie hyperbolique à travers le modèle A. De surcroît, $\Theta_r(z)$ est visiblement inchangée si nous remplaçons z par $z + 2$, c'est-à-dire si nous effectuons une symétrie du plan hyperbolique. Toutefois, la découverte importante de ce sujet est que $\Theta_r(z)$ satisfait aussi à une symétrie hyperbolique stricte, mais cachée, qui donne un contrôle inattendu sur le problème arithmétique initial.

Il est particulièrement facile de décrire la symétrie cachée lorsque r est un multiple de 4. La symétrie cachée est :
$\Theta_r(-1/z) = (-1)^{r/4} \times z^{r/2}\, \Theta_r(z)$.
La symétrie $z \rightarrow -1/z$ (rotation hyperbolique du plan hyperbolique de 180° autour du point i dans la représentation A) a déjà été mentionnée dans notre discussion du modèle A. Il s'ensuit que la fonction $\Theta_r(z)$ se réplique d'une



6. Le même pavage du plan hyperbolique **représenté à l'aide de deux modèles : le modèle A *(à gauche)* et le modèle B *(à droite)*. C'est l'un des nombreux pavages symétriques du plan hyperbolique. Malgré la différence de représentation, tous les triangles sont congruents : il existe des transformations de la géométrie qui fait correspondre n'importe quel triangle à n'importe quel autre.**



7. Un pavage du plan hyperbolique. **Ce pavage est dit 2-3-7, car les angles de chaque triangle sont égaux à $\pi/2$, $\pi/3$ et $\pi/7$.**

manière particulièrement simple lorsque l'on passe de pavé en pavé dans le pavage infini de la géométrie hyperbolique, qui ressemble, dans notre modèle A à la figure 6a et dans notre modèle B de la représentation hyperbolique comme la figure 6b.

Ainsi, si vous connaissez la fonction $\Theta_r(z)$ sur seulement trois pavés situés aux bons endroits dans le pavage décrit dans la figure 6, vous pouvez facilement trouver ses valeurs sur n'importe quel point du plan hyperbolique par les vertus des symétries cachées ou non qui le sous-tendent. Que pouvons nous tirer de ce curieux état des choses ?

Nous avons engendré une fonction $\Theta_r(z)$ qui a été conçue et définie comme une « boîte » destinée à stocker une collection de fonctions de comptage arithmétique intéressantes $A_r(N)$ et qui a reçu l'apparence d'une série de Fourier classique, telle que nous l'avons vu dans la formule plus haut. Spécifiquement, en écrivant $z = x + iy$ la fonction génératrice devient

$$\Theta_r(z) = 1 + A_r(1)\, e^{-\pi y} e^{\pi ix} + A_r(2)\, e^{-2\pi y} e^{2\pi ix} + \ldots + A_r(N)\, e^{-N\pi y} e^{N\pi ix} + \ldots$$

Heureusement, nous travaillons dans la moitié supérieure du plan ($y > 0$), de sorte que toutes les exponentielles en y sont convergentes. Toutefois, si nous essayons de poser $y = 0$ dans la formule, la série ne converge plus ; pour une valeur fixée de y, notre série converge de moins en moins vite à mesure que y décroît. Néanmoins, la symétrie cachée de cette fonction vis-à-vis du pavage infini du plan hyperbolique nous permet de contrôler son comportement pour les y petits et pour les grands y (ce dernier point étant évidemment plus facile).

Avec ce type de contrôle (et pas mal de travail supplémentaire), on obtient des résultats intéressants, comme la formule suivante due à Carl Jacobi, et qui est un corollaire de la théorie que nous venons d'évoquer :
le nombre de manière dont l'entier N peut être exprimé comme la somme de 8 carrés est 16 fois la somme pondérée suivante des cubes des diviseurs de N: la somme sur d, les diviseurs de N, de $(-1)^{d+N} d^3$.
Si l'on est intéressé par le nombre de point d'un réseau qui se trouve à une distance donnée de l'origine dans des espaces euclidiens de différentes dimensions, cette formule répond à la question dans une espace de dimensions 8. On retombe ici de manière inattendue sur des problèmes d'empilements de sphères.

Les équations cubiques

Un autre problème où les symétries cachées interviennent est la résolution des équations du troisième degré. Imaginons que l'on nous donne une équation **E** de la forme $Y^2 = X^3 + aX + b$ où a et b sont des entiers et tel que le polynôme cubique $X^3 + aX + b$ n'ait pas de racine double. De telles équations définissent les merveilleux objets mathématiques que l'on nomme courbes elliptiques.

Considérons l'information arithmétique suivante sur la « modularité arithmétique » modulo p de l'équation **E**. C'est-à-dire que fixant un nombre premier p, on considère toutes les paires d'entiers (x, y) telles que y^2 soit égale à x^3+ax+b plus un entier divisible par p. Une telle paire (x, y) est nommée une solution de l'équation **E** « modulo p ». Deux telles paires (x, y) et (x', y') sont dites équivalentes si x' est égal à x plus un multiple de p et, de manière similaire, y' est égal à y plus un multiple de p. Nommons $N_E(p)$ le nombre de classe d'équivalence des solutions de **E** modulo p, c'est-à-dire le nombre de classes d'équivalences des paires d'entiers (x, y) qui sont solutions de l'équation **E** modulo p.

L'une des avancées majeure de la théorie des nombres, qui suit la grande découverte du Britannique d'Andrew Wiles est qu'il existe une fonction génératrice

$$\Theta_E(z) := 1 + A_E(1)\, e^{2\pi iz} + A_E(2)\, e^{4\pi iz} + \ldots + A_E(N)\, e^{2N\pi iz} + \ldots$$

telle que $A_E(p) = p - N_E(p)$ pour tout premier impair p pour lequel $N_E(p)$ est défini ; de surcroît, cette fonction génératrice $\Theta_E(z)$ converge pour tout nombre complexe z du plan supérieure et elle satisfait certaines symétries cachées analogues aux symétries de la fonction $\Theta_r(z)$.

Ainsi, de la même façon que l'était $\Theta_r(z)$ dans notre discussion précédente, en vertu des symétries qu'elle recèle, la fonction $\Theta_E(z)$ peut être comprise et contrôlée en n'importe quel point du plan hyperbolique pourvu que vous connaissiez un nombre fini (situé de manière adéquate) de pavés du pavage décrit dans la figure 6. Une conséquence célèbre de l'existence de ces symétries, obtenue grâce aux travaux magnifiques de Jean-Pierre Serre, Gerhart Frey et Ken Ribet, est la démonstration du grand théorème de Fermat.

Barry MAZUR est mathématicien à l'Université d'Harvard. Ses travaux portent sur la théorie des nombres et la géométrie algébrique.

H. Weyl, *Symétrie et mathématique moderne*, Point-Sciences Flammarion, 1994.
D. Mumford, C. Series et D. Wright, *Indra's pearls*, Cambridge University Press, 2002.