# EXISTENCE ET UNICITÉ DES PRÉDUAUX DES ESPACES DE BANACH

Pierre YOUSSEF

17 mai 2009

Le but de ce travail est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité de certains préduaux des espaces de banach. On introduira la notion d'épluchabilité et on démontrera le résultat de H.ROSENTHAL à propos des espaces de banach contenant $l^1(\mathbb{N})$ qu'on aura besoin par la suite.
Commençons à présent par des notions de base :

## 1 Préliminaires

Soit X un espace de Banach.
M un sous-espace de X et N un sous-espace de $X^*$.
on pose :

$$M^{\perp} = \{x^* \in X^* / < x^*, x >= 0 \ \forall x \in M\}$$
$$N_{\perp} = \{x \in X / < x^*, x >= 0 \ \forall x^* \in N\}$$

**Proposition 1.1.** *$M^{\perp}$ est un sous-espace $\sigma(X^*,X)$-fermé de $X^*$ et $N_{\perp}$ est un sous-espace fortement fermé de X.*

**démonstration .** *On vérifie sans difficulté que se sont des sous-espaces.*
*Soit $(x_n^*)_n$ suite de $M^{\perp}$ telle que $x_n^* \longrightarrow x^*$ pour $\sigma(X^*,X)$.*
*Si $x \in M, < x^*, x >= lim_{n\to\infty} < x_n^*, x >= 0$*

*donc* $< x^*, x >= 0\ \forall x \in M \Rightarrow x^* \in M^{\perp}$ *et* $M^{\perp}$ *est alors* $\sigma(X^*,X)$*-fermé dans* $X^*$.
*Soit* $(x_n)_n$ *suite de* $N_{\perp}$ *telle que* $x_n \longrightarrow x$
$\forall x^* \in N,\ 0 =< x^*, x_n > \longrightarrow < x^*, x >$ *car* $x^*$ *continue*
$\Rightarrow < x^*, x >= 0\ \forall x^* \in N$
$\Rightarrow x \in N_{\perp}$ *et* $N_{\perp}$ *est alors fermé.*

**Proposition 1.2.**

1. $(M^{\perp})_{\perp}$ *est égal à l'adhérence de* $M$ *dans* $X$ *( pour la topologie de la norme )*
2. $(N_{\perp})^{\perp}$ *est égal à l'adhérence* $\sigma(X^*,X)$ *de* $N$ *dans* $X^*$

**démonstration .**

1. *on a d'abord que* $M \subseteq (M^{\perp})_{\perp}$ *car si* $x \in M \Rightarrow \forall x \in M^{\perp}$ , $< x^*, x >= 0$
   $\Rightarrow x \in (M^{\perp})_{\perp}$

   *D'après la proposition 1.1,* $(M^{\perp})_{\perp}$ *est fermé dans* $X$ *donc* $\overline{M} \subseteq (M^{\perp})_{\perp}$.

   *Si* $\overline{M} \subsetneqq (M^{\perp})_{\perp}$ *alors* $\exists x_0 \in (M^{\perp})_{\perp}$ *t.q* $x_0 \notin \overline{M}$
   *D'après le théorème de Hahn-Banach,* $\exists \xi \in X^*$ *t.q* $< \xi, x_0 >= 1$ *et* $\overline{M} \subseteq ker\xi$
   $\xi \in M^{\perp}$ *car* $\forall x \in M$, $< \xi, x >= 0$. *or* $x_0 \in (M^{\perp})_{\perp}$ *alors* $< \xi, x_0 >= 0$ *contradiction*
   *D'où* $\overline{M} = (M^{\perp})_{\perp}$ *c.q.f.d*

2. *De même on a* $N \subset (N_{\perp})^{\perp}$ *car si* $x^* \in N \Rightarrow \forall x \in N_{\perp}$, $< x^*, x >= 0$
   $\Rightarrow x^* \in (N_{\perp})^{\perp}$

   *D'après la proposition 1.1,* $(N_{\perp})^{\perp}$ *est* $\sigma(X^*,X)$*-fermé donc* $\overline{N}^{\sigma(X^*,X)} \subseteq (N_{\perp})^{\perp}$

   *Si* $\overline{N}^{\sigma(X^*,X)} \subsetneqq (N_{\perp})^{\perp}$ *alors* $\exists x_0^* \in (N_{\perp})^{\perp}$ *t.q* $x_0^* \notin \overline{N}^{\sigma(X^*,X)}$
   *D'après le théorème de Hahn-Banach,* $\exists x \in X$ *t.q* $< x_0^*, x >= 1$ *et* $\overline{N}^{\sigma(X^*,X)} \subseteq ker\ x$
   $x \in N_{\perp}$ *car* $\forall x^* \in N$, $< x^*, x >= 0$ *or* $x_0^* \in (N_{\perp})^{\perp}$ *donc* $< x_0^*, x >= 0$ *contradiction.*
   *D'où* $\overline{N}^{\sigma(X^*,X)} = (N_{\perp})^{\perp}$ *c.q.f.d*

**Proposition 1.3.** *Soit $M$ un sous-espace d'un espace de Banach $X$. on a alors $M^* \equiv X^*/M^\perp$ et $(X/M)^* \equiv M^\perp$ où $\equiv$ signifiera isométriquement isomorphe.*

**démonstration .**

– *Si $m^* \in M^*$, soit $x^*$ un prolongement de $m^*$ à $X$ tout entier.*

$$\text{on définit } \varphi \ : M^* \longrightarrow X^*/M^\perp$$
$$m^* \longrightarrow x^* + M^\perp$$

*$\varphi$ est bien définie : en effet si $x_1^*$ et $x_2^*$ sont 2 prolongements de $m^*$ alors $x_1^* - x_2^* = 0$ sur $M \Rightarrow x_1^* - x_2^* \in M^\perp$*
*donc $x_1^* + M^\perp = x_2^* + M^\perp$ et $\varphi$ est bien définie.*

*$\varphi$ est évidemment linéaire car si $x_1^*$ (resp $x_2^*$) est un prolongement de $m_1^*$ (resp $m_2^*$) alors $x_1^* + x_2^*$ est un prolongement de $m_1^* + m_2^*$ (de même pour $\lambda m^*$).*

*$\varphi$ est surjective car si $x^* \in X^*$ alors $x^*_{/M^*} \in M^*$ et $\varphi(x^*_{/M^*}) = x^* + M^\perp$*

*Si $m^* \in M^*$ et $x^*$ un prolongement de $m^*$ alors $\|m^*\| \leq \|x^*\|$*
*en passant à la borne inférieure des $\|x^*\|$ on obtient $\|x^* + M^\perp\|$ ainsi $\|m^*\| \leq \|\varphi(m^*)\| \leq \|x^*\|$*
*on a $< m^*, x > \leq \|m^*\|.\|x\|$ alors d'après Hahn-Banach $\exists x_0^* \in X^*$ qui prolonge $m^*$ à $X$ tout entier et t.q $< x_0^*, x > \leq \|m^*\|.\|x\| \ \ \forall x \in X$ alors $\|x_0^*\| \leq \|m^*\|$*
*ainsi $\|x_0^*\| \leq \|m^*\| \leq \|\varphi(m^*)\| \leq \|x_0^*\|$ d'où $\|\varphi(m^*)\| = \|m^*\|$ et $\varphi$ est isométrique. Ce qui montre que $M^* \equiv X^*/M^\perp$.*

– *soit $\pi : X \longrightarrow X/M$ la surjection canonique. On pose Y=X/M.*

$$\text{on définit } \tau \ : Y^* \longrightarrow M^\perp$$
$$y^* \ \longrightarrow \tau y^* = y^* \circ \pi$$

*$\tau$ est bien définie car si $y^* \in Y^*$, $\forall x \in M \ < \tau y^*, x >=< y^*, \pi x >= 0$ $\Rightarrow y^* \circ \pi \in M^\perp$.*

*$\tau$ est évidemment linéaire.*

*Soit $x^* \in M^\perp$ :*
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "x^*"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \\ X/M \arrow[ur, dotted, "y^*"'] & \end{tikzcd}$$
*$M \subseteq kerx^*$ alors d'après la propriété universelle du quotient,*
*$\exists y^* : X/M \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire t.q $y^* \circ \pi = x^*$*
*on a $x \in kerx^* \Leftrightarrow \pi(x) \in kery^*$, ainsi $kery^* = \pi(kerx^*)$ fermé de $X/M$ car c'est l'image par $\pi$ d'un fermé de $X$.*
*$kery^*$ fermé alors $y^*$ continue donc $y^* \in (X/M)^*$ et $\tau y^* = x^*$, d'où $\tau$ est surjective.*

$$\begin{aligned} \textit{enfin } \|\tau y^*\| = \|y^* \circ \pi\| &= sup\{< y^*, \pi(x) > \ /x \in B_1(X)\} \\ &= sup\{< y^*, y > \ /y \in \pi(B_1(X))\} \\ &= sup\{< y^*, y > \ /y \in B_1(X/M)\} \\ &= \|y^*\| \end{aligned}$$

*Donc $\tau$ est isométrique. Ce qui montre que $(X/M)^* \equiv M^\perp$.*

## 2 Existence de préduaux d'espaces de Banach

On pose $i_E : E \longrightarrow E^{**}$ l'injection de E dans son bidual.
On dira isométrie en voulant désigner une bijection linéaire isométrique.
On notera $\equiv$ pour isométrie et $\cong$ pour isomorphisme.

**Définition 2.1.** *Soit E un espace de Banach. On dit qu'un espace de Banach X est un prédual normique de E si le dual $X^*$ de X, muni de la norme duale de celle de X, est isométrique à E.*

**Proposition 2.1.** *Soit E un espace de Banach . Alors :*
*$\exists Z \subseteq E^*$ t.q $E^{**} = i_E(E) \oplus Z^\perp \Leftrightarrow$ E est isomorphe à un dual (qui est $Z^*$).*

**démonstration .**

$\Rightarrow$) $E^{**} = i_E(E) \oplus Z^\perp$

*$Z \subseteq E^*$ alors d'après la proposition 1.3,* $Z^* \equiv E^{**}/Z^\perp$

*Or* $E \equiv i_E(E) \cong E^{**}/Z^\perp$ *donc $E$ est isomorphe à $Z^*$ .*

$\Leftarrow$) *Soit $X$ un espace de Banach t.q $E$ isomorphe à $X^*$ et soit* $\mathrm{E} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{X}^*$ *cet isomorphisme.*

$$\begin{array}{ccc} X^{**} & \xrightarrow{{}^t\varphi} & E^* \\ {\scriptstyle i_X}\uparrow & & \\ X & & \end{array}$$

*on pose* $Z = {}^t\varphi \circ i_X(X)$, $Z \subseteq E^*$ *et* $Z \cong X$

*donc* $Z^* \equiv E^{**}/Z^\perp$ *et* $Z^* \cong X^* \cong E$

*ainsi* $E^{**}/Z^\perp \cong E$

*Soit* $p : \mathrm{E}^{**} \longrightarrow \mathrm{E}^{**}/\mathrm{Z}^\perp$ *la surjection canonique*

*et* $\psi : E^{**}/Z^\perp \longrightarrow \mathrm{E}$ *l'isomorphisme.*

$\psi \circ p : \mathrm{E}^{**} \longrightarrow \mathrm{E}$ *linéaire surjective et* $ker \psi \circ p = Z^\perp$

*alors* $E^{**} = E \oplus Z^\perp$ *avec* $Z \subseteq E^*$ *c.q.f.d*

**Proposition 2.2.** *Soit $E$ un espace de Banach.*
*Soit* $T_E = \{F \text{ s.e.v de } E^{**} / \ F \text{ est } \sigma(E^{**}, E^*)\text{-fermé et } i_E(E) \oplus F = E^{**}\}$
*On a l'équivalence :*

1. *Il existe un espace de Banach $X$ t.q $X^*$ isomorphe à $E$.*
2. $T_E \neq \emptyset$

**démonstration .**

**1$\Rightarrow$2)** *Soit $X$ Banach t.q $X^*$ isomorphe à $E$.*

*D'après la proposition 2.1, on a* $E^{**} = i_E(E) \oplus Z^\perp$ *avec* $Z = {}^t\varphi \circ i_X(X)$

$Z \subseteq E^* \Rightarrow$ *d'après la proposition 1.1, $Z^\perp$ est un s.e.v $\sigma(E^{**}, E^*)$-fermé de $E^{**}$*

*Donc* $Z^\perp \in T_E$ *et* $T_E \neq \emptyset$

**2$\Rightarrow$1)** $T_E \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ *$F$ s.e.v $\sigma(E^{**}, E^*)$-fermé de $E^{**}$ t.q* $E^{**} = i_E(E) \oplus F$

*Soit* $G = F_\perp \subseteq E^*$. *D'après la proposition 1.2,* $(F_\perp)^\perp = \overline{F}^{\sigma(E^{**}, E^*)} = F$ *car $F$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-fermé. Donc* $E^{**} = i_E(E) \oplus G^\perp$.

*D'après la proposition 2.1, on a* $E \cong G^*$.

**Définition 2.2.** *Soit $X, Y$ deux espaces de Banach.*
*On appelle "distance de $X$ à $Y$" le nombre*
$d(X, Y) = inf\{\|\varphi\|.\|\varphi^{-1}\|/ \;\; \varphi$ *isomorphisme entre* $X$ *et* $Y\}$
*Si les deux espaces ne sont pas isomorphes, la distance est* $\infty$ .
*Si* $E$ *esp de Banach, on pose*
$P_E = \{X \text{ Banach}/\ \exists Y \subseteq E^* \text{ t.q } Y \text{ isomorphe à } X\}$ et $d(E, D) = \inf\limits_{X \in P_E} d(E, X^*)$

**Proposition 2.3.** *$E$ isomorphe à un dual* $\Leftrightarrow d(E, D) < \infty$ .

**démonstration .** $\Leftarrow$) $d(E, D) < \infty \Rightarrow \exists X \in P_E$ *t.q* $d(E, X^*) < \infty$ *alors* $E$ *isomorphe à* $X^*$.

$\Rightarrow$) *Soit* $X$ *t.q* $E$ *isomorphe à* $X^*$ *et soit* $\varphi$ *cet isomorphisme.*
$d(E, X^*) < \infty$ *car* $E$ *isomorphe à* $X^*$.

$$\begin{array}{ccc} X^{**} & \xrightarrow{\ {}^t\varphi\ } & E^* \\ {\scriptstyle i_X}\uparrow & & \\ X & & \end{array}$$

$X \cong {}^t\varphi \circ i_X(X) \subset E^* \Rightarrow X \in P_E$

*ainsi* $d(E, D) \leq d(E, X^*) < \infty$.

**Proposition 2.4.** *$E$ esp de Banach .* $S \in T_E$,
*soit* $\alpha(S) = inf\{\frac{1}{\epsilon}/ \ B_\epsilon(E^*) \subseteq \overline{S_\perp \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*, E)}\}$
*On a alors* $d(E, D) = inf\{\alpha(S)/S \in T_E\}$

**démonstration .** *on pose* $k = d(E, D)$

– *Montrons d'abord que* $d(E, D) \leq inf\{\alpha(S)/S \in T_E\}$

*Soit* $S \in T_E$, *d'après la proposition 2.2 on a* $E$ *isomorphe à* $(S_\perp)^*$ *et* $S_\perp \in P_E$.

$$\begin{aligned} \varphi : E^{**} &\longrightarrow (S_\perp)^* \\ \xi &\longrightarrow \xi_{/S_\perp} \end{aligned}$$
*induit un isomorphisme* $\psi$ *entre* $E^{**}/(S_\perp)^* = E^{**}/S \cong E$

$$\begin{aligned} \psi : E &\longrightarrow (S_\perp)^* \\ x &\longrightarrow x_{/S_\perp} \end{aligned} \qquad \text{on a clairement que } \|\psi\| = 1$$

*Soit* $\epsilon > 0$ *t.q* $B_\epsilon(E^*) \subseteq \overline{S_\perp \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*, E)}$
*Soit* $\xi \in (S_\perp)^*$ *t.q* $\|\xi\| \leq 1$ *et soit* $x \in E$ *t.q* $x_{/S_\perp} = \xi$

*D'après le théorème de Hahn-Banach :* $\|x\| = \sup_{\eta \in B_1(E^*)} < \eta, x >$

*alors* $\|x\| \leq \sup_{\eta \in \frac{1}{\epsilon}\overline{S_\perp \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*,E)}} < \eta, x >$

*or si* $\eta \in \overline{S_\perp \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*,E)}$ *alors* $\eta$ *est* $\sigma(E^*, E)$*-limite de* $\frac{1}{\epsilon}\eta_l$ *avec* $\eta_l \in \overline{S_\perp \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*,E)}$

$$\begin{aligned} < \eta, x > &= \frac{1}{\epsilon} \lim_l < \eta_l, x > \\ &= \frac{1}{\epsilon} \lim_l < \xi, \eta_l > \quad \textit{car } \eta_l \in S_\perp \textit{ et } x_{/S\perp} = \xi \\ &\leq \frac{1}{\epsilon}\|\xi\| \quad \textit{car } \|\eta_l\| \leq 1 \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

*Alors* $\|x\| \leq \frac{1}{\epsilon}$ *et donc* $\|\psi^{-1}\| \leq \frac{1}{\epsilon}$
*Parsuite* $\|\psi^{-1}\| \leq inf\{\frac{1}{\epsilon}/ \ B_\epsilon(E^*) \subseteq \overline{S_\perp \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*,E)}\} = \alpha(S)$

*Or* $S_\perp \subseteq E^*$ *donc* $S_\perp \in P_E$
*ainsi* $d(E, D) \leq d(E, (S_\perp)^*) \leq \|\psi\|.\|\psi^{-1}\| \leq \alpha(S)$
*D'où* $k = d(E, D) \leq inf\{\alpha(S)/S \in T_E\}$ .

- *Montrons maintenant que* $inf\{\alpha(S)/S \in T_E\} \leq d(E, D)$
  *Soit* $\epsilon > 0$,
  $k = d(E, D) = \inf_{X \in P_E} d(E, X^*) \Rightarrow \exists X \in P_E/d(E, X^*) < k + \epsilon < \infty$
  *E est isomorphe à* $X^*$.
  *Soit* $E \xrightarrow{\varphi} X^*$ *l'isomorphisme t.q* $\|\varphi\|.\|\varphi^{-1}\| < k + \epsilon$
  *On peut supposer que* $\|\varphi\| = 1$ *ainsi* $\|\varphi^{-1}\| < k + \epsilon$

  *On pose* $X_0 = {}^t\varphi \circ i_X(X)$*, d'après la proposition 2.2,* ${X_0}^\perp \in T_E$

  $\forall x \in E, \ \|x\| = \|\varphi^{-1} \circ \varphi(x)\| \leq \|\varphi^{-1}\|.\|\varphi(x)\| < (k + \epsilon)\|\varphi(x)\|$
  $\Rightarrow \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} > \frac{1}{k+\epsilon} \quad \forall x \in E \qquad (A).$
  *Supposons qu'* $\exists y_0^* \in E^*$ *t.q* $\|y_0^*\| < \frac{1}{k+\epsilon}$ *mais* $y_0^* \notin \overline{X_0 \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*,E)}$
  *D'après Hahn-Banach,*

$\exists x_0 \in E \ t.q < y_0^*, x_0 >= 1 \ \ mais \ < y^*, x_0 > < 1 \ \ \forall y^* \in \overline{X_0 \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*,E)}$

$< y_0^*, x_0 >= 1 \Rightarrow 1 \leq \|y_0^*\|.\|x_0\| \Rightarrow \|x_0\| > k + \epsilon$
$et \ \|\varphi(x_0)\| = \sup_{\|x\|=1} < \varphi(x_0), x >= \sup_{\|x\|=1} < {}^t\varphi \circ i_X(X), x_0 > < 1$
$car \ {}^t\varphi \circ i_X(x) \in X_0 \cap B_1(E^*)$
$\Rightarrow \frac{\|\varphi(x_0)\|}{\|x_0\|} < \frac{1}{k+\epsilon}$ *Contradiction avec (A).*

$ainsi \ \forall y_0^* \in E^* \ t.q \ \|y_0^*\| < \frac{1}{k+\epsilon} \ on \ a \ y_0^* \in \overline{X_0 \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*,E)}$
$\Rightarrow B_{\frac{1}{k+\epsilon}}(E^*) \subseteq \overline{X_0^{\perp}{}_{\perp} \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*,E)}$
$\Rightarrow \alpha(X_0^{\perp}) \leq k + \epsilon \ \ avec \ X_0^{\perp} \in T_E \ \ et \ \forall \epsilon > 0$
$\Rightarrow inf\{\alpha(S)/S \in T_E\} \leq k = d(E, D) \qquad c.q.f.d$

**Proposition 2.5.** *Si $E$ est isométrique à un dual $X^*$, on a alors $d(E,D) = 1$ et $\alpha(X_0^{\perp}) = 1$ avec $X_0 = {}^t\varphi \circ i_X(X)$ et $\varphi$ est l'isométrie entre $E$ et $X^*$.*

**démonstration .** *On a toujours $\alpha(S) \geq 1$ car si $B_\epsilon(E^*) \subseteq \overline{S_\perp \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*,E)}$ alors $\epsilon \leq 1$*
*or $d(E,D) = inf\{\alpha(S)/S \in T_E\} \Rightarrow d(E,D) \geq 1$ .*
*$E$ isométrique à $X^*$ et $\varphi$ cette isométrie : $\|\varphi\| = \|\varphi^{-1}\| = 1$*
$d(E, X^*) = inf\{\|\varphi\|.\|\varphi^{-1}\|/\varphi \ isomorphisme \ entre \ E \ et \ X^*\} \leq \|\varphi\|.\|\varphi^{-1}\|$
$\Rightarrow d(E, X^*) \leq 1 \ donc \ d(E,D) \leq 1 \ d'o\grave{u} \ d(E,D) = 1$
*D'après la proposition 2.4, on a $\alpha(X_0^{\perp}) \leq k = d(E,D) = 1$ et $\alpha(X_0^{\perp}) \geq 1$*
*Alors $\alpha(X_0^{\perp}) = 1$*

**Définition 2.3.** *Soit $E$ espace de Banach.*

- *On dit que $y_0 \in B_1(E^*)$ est faiblement fortement exposé dans $B_1(E^*)$ si :*
  $\exists x_0 \in E \ t.q < y_0, x_0 >= 1 \ et$
  $diam\{y \in B_1(E^*)/ < y, x_0 >> 1 - \eta\} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
- *On dit que $x_0 \in B_1(E)$ est fortement exposé dans $B_1(E)$ si :*
  $\exists y_0 \in E^* \ t.q < y_0, x_0 >= 1 \ et$
  $diam\{x \in B_1(E)/ < y_0, x >> 1 - \eta\} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

- *On dit que $E^*$ a la propriété de Radon-Nicodym si $B_1(E^*)$ est l'enveloppe convexe $\sigma(E^*, E)$-fermée de ses points faiblements fortement exposés.*
- *On dit que $E$ a la propriété de Radon-Nicodym si $B_1(E)$ est l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés.*

**Lemme 2.1.** *Si $x^*$ est faiblement fortement exposé dans $B_1(E^*)$ alors*
*$Id : (B_1(E^*), \sigma(E^*, E)) \longrightarrow (B_1(E^*), \|.\|)$ est continue en $x^*$.*

**démonstration .** *$x^*$ est faiblement fortement exposé alors*
$\exists x \in E \ / \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ *t.q*
$< x^*, x >= 1$ *et* $diam\{y^* \in B_1(E^*)/ < y^*, x >> 1 - \delta\} \leq \frac{\epsilon}{2}$.

*Ainsi* $\forall \epsilon > 0$, $B(x^*, \epsilon)$ *contient* $\{y^* \in B_1(E^*)/ < y^*, x > > 1 - \delta\}$ *qui est un* $\sigma(E^*, E)$*-voisinage de* $x^*$
*D'où la continuité de* $Id : (B_1(E^*), \sigma(E^*, E)) \longrightarrow (B_1(E^*), \|.\|)$ *en* $x^*$.

**Lemme 2.2.** *Soit $E$ un espace de Banach t.q $E^*$ ait la propriété de Radon-Nicodym.*
*Soit* $R_E = \{f \in E^{**}/ \ ker f \cap B_1(E^*)$ *est* $\sigma(E^*, E)$*-dense dans* $B_1(E^*)\}$
*Alors $R_E$ est un sous-espace $\sigma(E^{**}, E^*)$-fermé de $E^{**}$.*

**démonstration .** *On va montrer d'abord que :*
*(A)* $f \in R_E \Leftrightarrow \forall y$ *faiblement fortement exposé dans* $B_1(E^*)$, $f(y) = 0$.

*Une fois (A) démontré on a :*
*Si* $f, g \in R_E$ *alors* $\forall y$ *faiblement fortement exposé dans* $B_1(E^*)$,
$f(y) = g(y) = 0$
*alors* $(\lambda f + \mu g)(y) = 0$ *donc* $\lambda f + \mu g \in R_E$ *et* $R_E$ *est un s.e.v de* $E^{**}$.
*Si* $(f_l)_l$ *suite de* $R_E$ *t.q* $f_l \overset{\sigma(E^{**},E^*)}{\longrightarrow} f$
$\forall l$, $f_l \in R_E \Rightarrow \forall l$ *et* $\forall y$ *faiblement fortement exposé,* $< f_l, y >= 0$
$\Rightarrow \forall y$ *faiblement fortement exposé,* $< f, y >= lim < f_l, y >= 0$ *donc* $f \in R_E$.
*Parsuite* $R_E$ *est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-fermé dans* $E^{**}$.

*Montrons à présent (A) :*

$\Rightarrow)$ *Soit $f \in R_E$ et $x^* \in B_1(E^*)$ faiblement fortement exposé.*

*$f \in R_E \Rightarrow \exists (x_l^*)_l$ dans $ker f \cap B_1(E^*)$ t.q $x_l^* \xrightarrow{\sigma(E^*,E)} x^*$*
*D'après le lemme 2.1, Id : $(B_1(E^*), \sigma(E^*, E)) \longrightarrow (B_1(E^*), \|.\|)$ est continue en $x^*$*
*alors $x_l^* \xrightarrow{fortement} x^*$*
*or $ker f \cap B_1(E^*)$ est fortement fermé $\Rightarrow x^* \in ker f \Rightarrow f(x^*) = 0$.*

$\Leftarrow)$ *On a $\forall y$ faiblement fortement exposé dans $B_1(E^*)$, $f(y) = 0$*

*donc $ker f$ contient tous les points faiblement fortement exposés de $B_1(E^*)$.*
*$\overline{ker f \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*,E)}$ est convexe (car $ker f \cap B_1(E^*)$ l'est) et $\sigma(E^*, E)$-fermé et contient les points faiblement fortement exposés de $B_1(E^*)$.*

*or $E^*$ a la propriété de R.N donc $B_1(E^*)$ est l'enveloppe convexe $\sigma(E^*, E)$-fermée de ses points faiblement fortement exposés*
*donc $B_1(E^*) \subseteq \overline{ker f \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*,E)}$*
*ainsi $ker f \cap B_1(E^*)$ est $\sigma(E^*, E)$-dense dans $B_1(E^*)$ alors $f \in R_E$.*

**Lemme 2.3.** *Soit $E$ un espace de Banach. On a :*

1. *$i_E(E) \cap B_1(E^{**}) = i_E(B_1(E))$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-dense dans $B_1(E^{**})$.*
2. *Si $F$ un espace de Banach t.q $E^* \xrightarrow{I} F^*$ soit une isométrie alors ${}^tI \circ i_F(F) \cap B_1(E^{**}) = {}^tI \circ i_F(B_1(F))$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-dense dans $B_1(E^{**})$*

**démonstration .** *On a évidemment $i_E(E) \cap B_1(E^{**}) = i_E(B_1(E))$ (resp. ${}^tI \circ i_F(F) \cap B_1(E^{**}) = {}^tI \circ i_F(B_1(F))$) car $i_E$ (resp. ${}^tI \circ i_F$) est une isométrie.*

1. *Supposons qu'$\exists \xi \in B_1(E^{**})$ t.q $\xi \notin \overline{i_E(E) \cap B_1(E^{**})}^{\sigma(E^{**},E^*)}$.*
   *D'après Hahn-Banach,*
   *$\exists y_0^* \in E^*$ t.q $< \xi, y_0^* >= 1$ et $< \eta, y_0^* >= 0$ $\forall \eta \in \overline{i_E(E) \cap B_1(E^{**})}^{\sigma(E^{**},E^*)}$*
   *$\forall x \in B_1(E)$, $i_E(x) \in i_E(E) \cap B_1(E^{**})$ donc $< y_0^*, x >= 0$*

   *Parsuite $\forall x \in E$, $< y_0^*, x >= 0$*
   *donc $y_0^* = 0$ impossible car $< \xi, y_0^* >= 1$.*
   *D'où $i_E(E) \cap B_1(E^{**})$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-dense dans $B_1(E^{**})$.*
2. *Soit $\xi \in B_1(E^{**})$ alors $\exists \eta \in B_1(F^{**}) / \xi = {}^tI(\eta)$*

$\eta \in B_1(F^{**})$ *alors d'après 1),*
$\exists (\eta_l)_l$ *dans* $i_F(F) \cap B_1(F^{**})$ *t.q* $\eta_l \overset{\sigma(F^{**},F^*)}{\longrightarrow} \eta$

$({}^tI \circ \eta_l)_l$ *est dans* ${}^tI \circ i_F(F) \cap B_1(E^{**})$
*et* $y \in E^*$, $I(y) \in F^*$ *alors* $< \eta_l, I(y) > \longrightarrow < \eta, I(y) >$
$\Rightarrow < {}^tI \circ \eta_l, y > \longrightarrow < \xi, y > \quad \forall y \in E^*$, *donc* ${}^tI \circ \eta_l \overset{\sigma(E^{**},E^*)}{\longrightarrow} \xi$.

*D'où* ${}^tI \circ i_F(F) \cap B_1(E^{**})$ *est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$.

**Théorème 2.1.** *Soit E un espace de Banach t.q* $E^*$ *ait la propriété de Radon-Nicodym.*
*On a l'équivalence :*

1. *E isométrique au dual d'un espace de Banach.*
2. $E^{**} = i_E(E) \oplus R_E$.

**démonstration .**

**1⇒2)** *Soit X un espace de Banach t.q E isométrique à* $X^*$.
*Soit* $\varphi : E \longrightarrow X^*$ *cette isométrie.*
*D'après la proposition 2.2,*
*on a* $E^{**} = i_E(E) \oplus X_0^{\perp}$ *avec* $X_0 = {}^t\varphi \circ i_X(X)$.

– *On a* $R_E \cap i_E(E) = \{0\}$.

*en effet : soit* $x \in E$ *t.q* $i_E(x) \in R_E$
*alors* $ker i_E(x) \cap B_1(E^*)$ *est* $\sigma(E^*, E)$*-dense dans* $B_1(E^*)$
*c.à.d* $\{y^* \in B_1(E^*) / < y^*, x >= 0\}$ *est* $\sigma(E^*, E)$*-dense dans* $B_1(E^*)$
*donc* $\forall y^* \in B_1(E^*)$, $< y^*, x >= 0$ *alors* $\|x\| = 0$ *et* $x = 0$.

– *On a* $X_0^{\perp} \subseteq R_E$.

*en effet : si* $f \in X_0^{\perp}$ *alors* $X_0 \subseteq kerf$
*Or* $X_0 \cap B_1(E^*) = {}^t\varphi \circ i_X(B_1(X))$ *alors d'après le lemme 2.3,*
$X_0 \cap B_1(E^*)$ *est* $\sigma(E^*, E)$*-dense dans* $B_1(E^*)$.
*Comme* $X_0 \cap B_1(E^*) \subseteq kerf \cap B_1(E^*)$
*alors* $kerf \cap B_1(E^*)$ *est* $\sigma(E^*, E)$*-dense dans* $B_1(E^*)$.
*ainsi* $f \in R_E$ *et* $X_0^{\perp} \subseteq R_E$.

*D'après le lemme 2.2,* $R_E$ *est un espace vectoriel et comme en plus* $R_E \cap i_E(E) = \{0\}$ *et* $X_0^{\perp} \subseteq R_E$, *alors* $E^{**} = i_E(E) \oplus R_E$.

**2⇒1)** *D'après le lemme 2.2,* $R_E$ *est un s.e.v* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-fermé*
*et comme* $E^{**} = i_E(E) \oplus R_E$ *donc* $R_E \in T_E$.

*D'après la prposition 2.2,* $E$ *est isomorphe à* $(R_E)^*_\perp$.
*Or* $(R_E)_\perp = \{y \in E^* / \ < f, y >= 0 \ \forall f \in R_E\}$
*ainsi* $(R_E)_\perp \cap B_1(E^*)$ *contient les points faiblement fortement exposés de* $B_1(E^*)$.
*Comme* $E^*$ *a la propriété de Radon-Nicodym, alors* $B_1(E^*) = \overline{(R_E)_\perp \cap B_1(E^*)}^{\sigma(E^*,E)}$
*donc* $\alpha(R_E) = 1$ *et d'après la proposition 2.4,* $d(E, (R_E)^*_\perp) = 1$.
*Parsuite* $E$ *est isométrique à* $(R_E)^*_\perp$.

# 3 Caractérisation de H.ROSENTHAL des espaces de Banach contenant $l^1(\mathbb{N})$

Le but de cette partie est de donner une caractérisation des espaces de Banach contenant $l^1(\mathbb{N})$ qu'on utilisera dans la partie concernant l'unicité des préduaux. Nous allons énoncer un théorème très important de Baire en donnant une idée de la preuve, puis procéder par une série de lemmes pour aboutir au théorème principal à la fin de cette partie.

**Lemme 3.1.** *Soit* $X$ *espace de Baire et soit* $F_j$ *une suite de fermés qui recouvrent* $X$*. Alors* $\bigcup_j \overset{\circ}{F_j}$ *est un ouvert dense.*

**démonstration .** *On pose* $O = \bigcup_j \overset{\circ}{F_j}$
$F = \complement O$ *est un fermé, il s'agit de montrer qu'il est d'intérieur vide.*
*On a* $F = \bigcup_i F \cap F_i$ *car les* $F_i$ *recouvrent* $X$.
$F \cap F_i$ *fermé et* $\overset{\circ}{\widehat{F \cap F_i}} = \emptyset$
*car* $F \cap F_i \subseteq \complement \overset{\circ}{F_i} \cap F_i$ *donc* $\overset{\circ}{\widehat{F \cap F_i}} \subseteq \complement \overset{\circ}{F_i} \cap \overset{\circ}{F_i} = \emptyset$
*les* $(F \cap F_i)_i$ *sont des fermés d'intérieur vide et* $X$ *de baire donc* $F = \bigcup_i F \cap F_i$ *est d'intérieur vide.* *c.q.f.d*

**Définition 3.1.** *Soit $X$ un espace métrique et $f$ une fonction réelle sur $X$. On dit que $f$ est de première classe de Baire si $f$ est limite simple d'une suite de fonctions réelles continues sur $X$.*

**Théorème 3.1.** *(Théorème de Caractérisation de Baire)*
*$K$ espace métrique compact et $f$ fonction réelle sur $K$. On a l'équivalence :*

1. *$f$ est de première classe de baire sur $K$.*
2. *Pour tout fermé $M$ de $K$, $f_{/M}$ a au moins un point de continuité.*

**démonstration .**

**1⇒2)** *Soit $(f_l)_l$ suite de fonctions réelles continues sur $K$ qui converge simplement vers $f$.*
*Pour $n, q \in \mathbb{N}$, on pose $F_n^q = \{x \in K / \ |f_l(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{q} \quad \forall l, m \geq n\}$*
*$(f_l)_l$ converge simplement vers $f$ donc $\forall q$, on a $K = \bigcup\limits_{n \geq 0} F_n^q$*
*les $F_n^q$ sont fermés car les $f_l$ continues.*
*$K$ métrique compact donc de Baire, donc d'après le lemme 3.1*
*$O_q = \bigcup\limits_{n \geq 0} \overset{\circ}{F_n^q}$ est un ouvert dense dans $K$.*
*$(O_q)_q$ suite d'ouverts denses et $K$ de Baire donc $\bigcap\limits_q O_q$ est dense dans $K$.*
*Montrons alors que tout point de $\bigcap\limits_q O_q$ est un point de continuité de $f$.*

*Soit $x \in \bigcap\limits_q O_q$. Soit $\epsilon > 0$ et $q$ t.q $\frac{1}{q} < \frac{\epsilon}{3}$*

*$x \in O_q \Rightarrow \exists n$ t.q $x \in \overset{\circ}{F_n^q}$*
*ainsi $\exists U_1 \in v_x$ t.q $U_1 \subseteq F_n^q$*
*$\forall y \in U_1$, $|f_m(y) - f_l(y)| \leq \frac{1}{q} \quad \forall m, l \geq n$*
*$l \to \infty \Rightarrow |f_m(y) - f(y)| \leq \frac{1}{q} < \frac{\epsilon}{3}$*

*Soit $m > n$ fixé, $f_m$ étant continue en $x$ alors*
*$\exists U_2 \in v_x$ t.q $\forall y \in U_2$, $|f_m(y) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{3}$*

*Soit $U = U_1 \cap U_2 \in v_x$*
*$\forall y \in U$, $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(y)| + |f_m(y) - f(y)|$*
*$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$*
*ainsi $f$ est continue en $x$. c.q.f.d*

*La démonstration reste la même si on remplace $K$ par $M$ fermé dans $K$ car $M$ serait aussi compact.*
*Enfin remarquons qu'on a ainsi montré que si $f$ est de première classe de Baire alors l'ensemble des points de continuité de $f$ est un $G_\delta$-dense.*

**2⇒1)** *Je vais me contenter de donner une idée de la preuve.*
*$K$ étant fermé alors $\exists x_0 \in K$ point de continuité de $f$.*
*Soit $\epsilon > 0$,*
*il existe donc $U_1$ ouvert de $K$ t.q $\forall x, y \in U_1$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$*
*$F_1 = K - U_1$ est un fermé, donc de même d'après l'hypothèse*
*$\exists U_2$ ouvert de $K$ t.q $\forall x, y \in U_2 \cap F_1$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$*
*$F_2 = F_1 - U_2$ est fermé ainsi*
*$\exists U_3$ ouvert t.q $\forall x, y \in U_3 \cap F_2$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$*

*ainsi de suite, on a donc construit des fermés emboités t.q la variation de $f$ sur $F_i - F_{i+1}$ est inférieure à $\epsilon$.*
*On a donc une fonction escalier $f_\epsilon$ constante sur $F_i - F_{i+1}$ et t.q $\|f - f_\epsilon\| < \epsilon$*
*On montre alors que $f_\epsilon$ est limite d'une suite de fonctions continues et puis que c'est aussi le cas de $f$.*

**Définition 3.2.** *Soit $X$ espace de Banach.*
*On dit qu'un élément de $X^{**}$ est de première classe de Baire s'il est limite $\sigma(E^{**}, E^*)$ d'éléments de $X$.*
*L'ensemble des éléments de première classe de Baire sera noté $\Gamma_1(X)$.*

**Lemme 3.2.** *Soit $B$ espace de Banach. $X$ sous-espace de $B$ et $G \in X^{**}$ un élément de première classe de Baire de $B^{**}$.*
*Alors $G$ est de première classe de Baire de $X^{**}$.*

**démonstration .** *$G$ est de première classe de Baire de $B^{**}$ alors*
*$\exists b_n \overset{\sigma(B^{**},B^*)}{\longrightarrow} G$ avec $b_n \in B$. On suppose $\|G\| = 1$.*

*Montrons que $\forall N$, $d(B_1(X), \overline{conv}\{b_N, ...\}) = 0$ (1).*
*où $\overline{conv}\{b_N, b_{N+1}, ...\}$ est l'enveloppe convexe fermée de $\{b_N, ...\}$.*

*Une fois (1) démontré on a :*

$\exists (x_n)_n$ *dans* $B_1(X)$ *et* $(a_n)_n$ *avec* $a_n \in \overline{conv}\{b_n, ...\}$ *t.q* $\|x_n - a_n\| \longrightarrow 0$
*or* $a_n \overset{\sigma(B^{**},B^*)}{\longrightarrow} G$ *car* $a_n$ *est combinaison convexe des* $b_N$.
*donc* $x_n \overset{\sigma(B^{**},B^*)}{\longrightarrow} G$ *avec* $x_n$ *dans X.*
*ainsi G est de première classe de Baire de* $X^{**}$.

*Montrons (1)*
*supposons qu'*$\exists N/\ d(B_1(X), \overline{conv}\{b_N, ...\}) > 0$
*Comme* $B_1(X)$ *et* $\overline{conv}\{b_N, ...\}$ *sont convexes alors*
*d'après Hahn-Banach forme géométrique*
$\exists \xi \in B^*$ *t.q* $\sup\limits_{x \in B_1(X)} \xi(x) < \inf\limits_{i \geq N} \xi(b_i)$

$|G(\xi)| \leq \sup\limits_{\|H\| \leq 1, H \in X^{**}} |H(\xi)| \leq \sup\limits_{x \in B_1(X)} |\xi(x)|$ *car* $B_1(X)$ *est* $\sigma(X^{**}, X^*)$*-dense dans* $B_1(X^{**})$
*donc* $|G(\xi)| < \inf\limits_{i \geq N} \xi(b_i) \leq \lim\limits_{i} \xi(b_i) = G(\xi)$ *contradiction.*

**Lemme 3.3.** *X espace de Banach. K la boule unité fermée de* $X^*$ *avec la topologie* $\sigma(X^*, X)$. *Soit* $f \in X^{**}$
*Si* $f_{/K}$ *est une fonction de première classe de Baire sur K, on a alors f est un élément de première classe de Baire de* $X^{**}$.

**démonstration .** *Soit* $f \in X^{**}$ *t.q* $f_{/K}$ *soit de première classe de Baire sur K.*
*Il suffit de montrer que* $f \in \Gamma_1(X)$ *pour* $X = C(\Omega)$ *avec* $\Omega$ *compact.*
*en effet : on pourrait prendre* $\Omega = K$

$$\begin{aligned} et\ T :& X \longrightarrow C(\Omega) \\ & x \ \longrightarrow x_{/\Omega} \qquad où\ < x_{/\Omega}, \xi > = < \xi, x > \end{aligned}$$

*Comme* $\|x_{/\Omega}\| = \sup\limits_{\xi \in \Omega = K} < \xi, x > = \|x\|$ *alors T est une isométrie.*
*Notons E la boule unité de* $C(\Omega)^*$
*et* $T^* : C(\Omega)^* \longrightarrow X^*$ *la transposée de T.*
$T^*$ *envoie donc E dans K, et on a* $T^{**}f = f \circ T^*$
*Comme f est une fonction de première classe de Baire sur K et* $T^*$ *isométrie qui envoie E sur K , alors* $f \circ T^*$ *est une fonction de première classe de Baire sur E.*
*une fois on montre le lemme pour* $C(\Omega)$, *on aurait* $T^{**}f \in \Gamma_1(C(\Omega))$

*Or $T^{**}f \in (TX)^{**}$ donc d'après le lemme 3.2, $T^{**}f \in \Gamma_1(TX)$ et parsuite $f \in \Gamma_1(X)$ puisque $X$ et $TX$ sont isométriques.*

*Travaillons alors avec $X = C(\Omega)$ où $\Omega = K$ espace compact.*
*$K$ étant la boule unité de $X^*$.*
*On identifie $X^*$ avec $M(\Omega)$ à l'aide de*

$$\begin{aligned} \psi : & M(\Omega) \longrightarrow X^* \\ & \mu \quad \longrightarrow \psi(\mu) \end{aligned}$$

*où $\psi(\mu)(g) = \int g d\mu$ pour tout $g \in X$, et $M(\Omega)$ est l'espace des mesures signées sur $\Omega$.*

*pour $\mu \in M(\Omega)$, on note*
*supp $\mu = \{x \in \Omega / \ |\mu|(U) > 0$ pour tt ouvert $U$ voisinage de $x\}$*
*et pour $S$ fermé dans $\Omega$, on note P(S) l'ensemble de toutes les probabilités $\mu \in M(\Omega)$ t.q supp $\mu \subseteq S$.*

*$P(S) \subseteq K$ car si $\mu \in P(S)$ alors $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = 1 \Rightarrow \mu \in K$.*

*P(S) est $\sigma(X^*, X)$-fermé dans K car si $(\mu_n)_n$ dans P(S) converge $\sigma(X^*, X)$ vers $\mu$.*
*alors $1 = \mu_n(\Omega) \longrightarrow \mu(\Omega) \Rightarrow \mu(\Omega) = 1$ donc $\mu$ probabilité.*
*comme supp $\mu \subseteq \bigcup_n$supp $\mu_n \subseteq S$ alors $\mu \in P(S)$ et P(S) est donc $\sigma(X^*, X)$-fermé dans K.*

*On note $P_{at}(S)$ l'ensemble des mesures atomiques dans P(S) et $P_\mu$ l'ensemble des probabilités de P(S) qui sont absolument continues par rapport à $\mu$.*
*On a $P_{at}(S)$ et $P_\mu$ sont $\sigma(X^*, X)$-denses dans P(S).*

*Soit $g \in X^{**}$ défini par $g(\mu) = \int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega)$ pour tt $\mu \in M(\Omega)$.*
*$g \in \Gamma_1(X)$ car $f_{/\Omega}$ est une fonction de première classe de Baire sur $\Omega$.*
*Soit $h = f - g$, $h_{/\Omega}$ est donc une fonction de première classe de Baire sur $\Omega$.*

*Montrons que $h = 0$*
*On a $h(\mu) = 0 \ \ \forall \mu \in P_{at}(\Omega)$ (1)*

*Si* $h \neq 0$, *alors* $\exists \nu \in P(\Omega)$ *t.q* $h(\nu) \neq 0$
*On peut supposer que* $h(\nu) > 0$ *sinon on multiplie h par -1.*
*On note* $Z = \{\lambda \in M(\Omega)/\ \lambda << \nu\}$ *l'ensemble des mesures absolument continues par rapport à* $\nu$
*Par le théorème de Riesz,*
$\exists \phi$ *fonction mesurable bornée t.q* $h(\lambda) = \int \phi d\lambda \quad \forall \lambda \in Z$ *(2)*

*en particulier,* $h(\nu) = \int \phi d\nu > 0$ *donc* $\int \phi^+ d\nu > 0$ *où* $\phi^+$ *est la partie positive de* $\phi$.
*Soit* $c > 0$ *t.q* $\nu(E) > 0$ *où* $E = \{\omega \in \Omega/\ \phi(\omega) \geq c\}$
*Si* $\lambda \in P(\Omega)$ *est t.q* $\lambda(\complement E) = 0$
*alors* $\int \phi d\lambda = \int_E \phi d\lambda \geq c.$ *(3)*

*Soit alors* $\mu \in P(\Omega)$ *définie par* $\mu(B) = \frac{\nu(B \cap E)}{\nu(E)}$ *pour tout ensemble mesurable B.*
*On a évidemment* $\mu << \nu$ *et* $\mu(\complement E) = 0$
*ainsi* $P_\mu \subseteq Z$ *et* $\forall \lambda \in P_\mu$, $\lambda(\complement E) = 0$ *car* $\mu(\complement E) = 0$
*Donc d'après (2) et (3), on a*
$h(\lambda) \geq c \quad \forall \lambda \in P_\mu$ *(4)*

*Soit alors* $S = supp\ \mu$. *Donc* $h \geq c$ *sur* $P_\mu(S)$ *qui est un ensemble dense de P(S), et* $h = 0$ *sur* $P_{at}(S)$ *qui est un ensemble dense de P(S).*
*Ainsi* $h_{/P(S)}$ *n'a pas de points de continuité dans P(S) qui est* $\sigma(X^*, X)$*-fermé dans* $\Omega$.
*Or* $h_{/\Omega}$ *est de première classe de Baire sur* $\Omega$*, ce qui est contradictoire d'après le théorème 3.1.*
*Donc* $h = 0$ *parsuite* $f = g \in \Gamma_1(X)$. *c.q.f.d*

**Lemme 3.4.** *Soit K espace compact et f fonction réelle bornée sur K n'ayant aucun point de continuité. Alors* $\exists L$ *fermé de K et* $r, \delta \in \mathbb{R}$ *avec* $\delta > 0$ *t.q*
$(\mho)$ *pour tt ouvert non vide U de L,* $\exists y, z \in U$ *t.q* $f(y) > r + \delta$ *et* $f(z) < r$.

**démonstration .** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*
$A_n = \{x \in K/\ \forall U \in v_x,\ \exists y, z \in U$ *t.q* $f(y) - f(z) > \frac{1}{n}\}$
*f n'a aucun point de continuité sur K donc*
$\forall x \in K,\ \exists n \in \mathbb{N}^*$ *t.q* $\forall U \in v_x,\ \exists y, z \in U/\ f(y) - f(z) > \frac{1}{n}$
*ainsi* $K = \underset{n}{\cup} A_n$.

*$A_n$ est fermé car si $x \in \complement A_n$ alors*
*$\exists U \in v_x$ ouvert t.q $\forall y, z \in U,\ f(y) - f(z) \leq \frac{1}{n}$ ainsi $U \subseteq \complement A_n$*
*donc $\complement A_n$ est ouvert.*

*K étant compact, il est de Baire alors $\exists n_0 /\ \overset{\circ}{A}_{n_0} \neq \emptyset$*
*On pose $U_0 = \overset{\circ}{A}_{n_0}$ et $K_0 = \overline{U_0}$ et $\delta = \frac{1}{n_0}$*
*$\mathbb{Q} = (r_n)_{n \geq 1}$, on pose*
*$B_n = \{x \in K_0 /\ \forall U \in v_x,\ \exists y, z \in U \cap K_0$ t.q $f(z) < r_n$ et $f(y) > r_n + \delta\}$*
*les $B_n$ sont fermés (comme pour les $A_n$).*

*$K_0 = \underset{n}{\cup} B_n$ car si $x \in K_0 = \overline{U_0}$*
*alors $\forall U \in v_x$ ouvert, $U \cap U_0 \neq \emptyset$ ainsi $U \cap U_0 \in v_x$*
*or $x \in K_0 \subseteq A_{n_0}$ donc $\exists y, z \in U \cap U_0$ t.q $f(y) - f(z) > \delta$*
*$\Rightarrow \exists n /\ f(z) < r_n < f(y) - \delta$ ainsi $f(z) < r_n$ et $f(y) > r_n + \delta$*
*donc $x \in B_n$*

*De même $K_0$ étant compact (fermé dans un compact), il est de Baire*
*donc $\exists n_1 /\ \overset{\circ}{B}_{n_1} \neq \emptyset$*

*On pose $V = \overset{\circ}{B}_{n_1}$ et $L = \overline{V}$ et $r = r_{n_1}$*
*et donc on a trouvé L,r et $\delta$ t.q ($\mho$) soit vérifiée.*

**Définition 3.3.** *On dira qu'une suite $(A_n, B_n)_n$ de paires d'ensembles est indépendante si*
*$\forall n,\ A_n \cap B_n = \emptyset$ et pour tt $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{N}$ finis disjoints on a*
*$(\underset{n \in F_1}{\cap} A_n) \cap (\underset{n \in F_2}{\cap} B_n) \neq \emptyset$*

**Lemme 3.5.** *Soit $f, L, r$ et $\delta$ satisfaisant le lemme 3.4.*
*Soit G un sous-ensemble borné de $C(L)$ et supposons que f appartient à l'adhérence de G pour la topologie de la convergence simple.*
*Alors il existe une suite $(g_n)_n$ de G t.q si*
*$A_n = \{x \in L /\ g_n(x) > r + \delta\}$ et $B_n = \{x \in L /\ g_n(x) < r\}$*
*alors $(A_n, B_n)_n$ est indépendante.*

**démonstration .** *Soit $y_1, y_2 \in L$ t.q $f(y_1) > r + \delta$ et $f(y_2) < r$ (ça existe* *d'après le lemme 3.4)*

*Comme f est dans l'adhérence de G (pr la convergence simple) alors* $\exists g_1 \in G$ *t.q* $g_1(y_1) > r + \delta$ *et* $g_1(y_2) < r$

*Supposons* $g_1, ..., g_{n-1}$ *construits de telle sorte que* $\bigcap_{i=1}^{n-1} \epsilon_i A_i \neq \emptyset$
*où* $\epsilon_i = \pm 1$ *et* $1.A_i = A_i$ *et* $-1.A_i = B_i$

*les* $A_i$ *et* $B_i$ *sont ouverts car* $g_i$ *continues (car* $g_i \in G$*) donc* $\bigcap_{i=1}^{n-1} \epsilon_i A_i$ *ouvert de L, donc d'après le lemme 3.4*
$\exists y_1^\epsilon, y_2^\epsilon \in \bigcap_{i=1}^{n-1} \epsilon_i A_i$ *t.q* $f(y_1^\epsilon) > r + \delta$ *et* $f(y_2^\epsilon) < r$ $\quad(\ \epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_{n-1})\ )$
*donc* $\exists g_n \in G/\ g_n(y_1^\epsilon) > r + \delta$ *et* $g_n(y_2^\epsilon) < r$ *d'où* $\bigcap_{i=1}^{n} \epsilon_i A_i \neq \emptyset$

*La suite* $(g_n)_n$ *ainsi construite répond donc à la question.*

**Définition 3.4.** *On dit q'une suite bornée* $(f_n)_n$ *d'éléments d'un espace de Banach est équivalente à la base usuelle de* $l^1(\mathbb{N})$ *si*
$\exists \delta > 0$ *t.q pour tout n et tous* $c_1, ...c_n$ *scalaires on a* $\delta \sum_{i=1}^{n} |c_i| \leq \| \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \|$.

**Proposition 3.1.** *Soit X espace de Banach. Supposons qu'il existe* $(f_n)_n$ *dans X équivalente à la base usuelle de* $l^1(\mathbb{N})$.
*Alors il existe un sous-espace de X isomorphe à* $l^1(\mathbb{N})$.

**démonstration .** *Soit* $\delta > 0$ *t.q pour tout n et tous* $c_1, ...c_n$ *scalaires on a* $\delta \sum_{i=1}^{n} |c_i| \leq \| \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \|$.

*Soit M l'espace vectoriel fermé engendré par les* $f_n$.

$$\text{Soit } \varphi : \begin{array}{rcl} l^1(\mathbb{N}) & \longrightarrow & M \\ (c_1, ..., c_n, ..) & \longrightarrow & \sum_i c_i f_i \end{array}$$

$\varphi$ *est évidemment linéaire et bijective.*

*$\varphi$ est continue car $\|\sum\limits_i c_i f_i\| \leq q\sum\limits_i |c_i|$ où $q = sup\ f_i$*

*$\varphi^{-1}$ est continue car $\forall n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |c_i| \leq \frac{1}{\delta}\|\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i\|$ donc $\|\varphi^{-1}(x)\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\|$.*

*Donc $\varphi$ est un isomorphisme.*

**Lemme 3.6.** *Soit $(g_n)_{n\in M}$ suite bornée de fonctions réelles sur un ensemble $L$, $\delta$ et $r$ des réels avec $\delta > 0$. On suppose que $(A_n, B_n)_{n\in M}$ est indépendante. où $A_n = \{x \in L/\ g_n(x) > \delta + r\}$ et $B_n = \{x \in L/\ g_n(x) < r\}$.*
*Alors $(g_n)_{n\in M}$ est équivalente à la base usuelle de $l^1(\mathbb{N})$.*

**démonstration .** *On peut supposer $\delta + r > 0$ sinon on multiplie $g_n$ par -1.*

*Considérons une suite de scalaires $(c_i)_{i\in M}$ où seulement un nombre fini des $c_i$ est non nul et $\sum\limits_i |c_i| = 1$.*
*Il suffit de montrer qu'il existe $s \in L$ t.q $|\sum\limits_i c_i g_i(s)| \geq \frac{\delta}{2}$ (1)*
*On aurait $\|\sum\limits_i c_i g_i\| \geq \frac{\delta}{2}$, et si $c'_1, ..., c'_n$ sont des scalaires quelconques alors en posant $c_i = \frac{c'_i}{\sum\limits_i |c'_i|}$ et en appliquant (1) on a $\|\sum\limits_{i=1}^{n} c'_i f_i\| \geq \frac{\delta}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} |c'_i|$.*
*alors $(g_n)_{n\in M}$ serait équivalente à la base usuelle de $l^1(\mathbb{N})$.*

*Soit $G = \{i \in M/\ c_i > 0\}$ et $B = \{i \in M/\ c_i < 0\}$.*

*$G$ et $B$ sont finis puisqu'un nombre fini des $c_i$ est non nul. $G \cap B = \emptyset$.*
*Comme $(A_n, B_n)_{n\in M}$ est indépendante alors*
*$(\bigcap\limits_{i\in G} A_i) \cap (\bigcap\limits_{i\in B} B_i) \neq \emptyset$ et $(\bigcap\limits_{i\in B} A_i) \cap (\bigcap\limits_{i\in G} B_i) \neq \emptyset$*

*Soit alors $x \in (\bigcap\limits_{i\in G} A_i) \cap (\bigcap\limits_{i\in B} B_i)$ et $y \in (\bigcap\limits_{i\in B} A_i) \cap (\bigcap\limits_{i\in G} B_i) \neq \emptyset$*

*On a $\sum\limits_{i\in B} c_i g_i(x) = \sum\limits_{i\in B} -|c_i| g_i(x)$ car si $i \in B$, $c_i < 0$*
*Or $x \in \bigcap\limits_{i\in B} B_i$ donc $g_i(x) < r$*
*D'où*

$$\sum_{i\in B} c_i g_i(x) > -r\sum_{i\in B} |c_i|$$

*De même* $\sum\limits_{i\in G} c_i g_i(y) = \sum\limits_{i\in G} |c_i| g_i(y)$ *car si* $i \in G$, $c_i > 0$
*Or* $x \in \bigcap\limits_{i\in G} B_i$ *donc* $g_i(y) < r$
*D'où*

$$-\sum_{i\in G} c_i g_i(y) > -r \sum_{i\in G} |c_i|$$

*De la même manière on a :*

$$\sum_{i\in G} c_i g_i(x) > (\delta + r) \sum_{i\in G} |c_i|$$

*et*

$$-\sum_{i\in B} c_i g_i(y) > (\delta + r) \sum_{i\in B} |c_i|$$

*ainsi*

$$\sum_{i\in M} c_i g_i(x) = \sum_{i\in G} c_i g_i(x) + \sum_{i\in B} c_i g_i(x) \geq \sum_{i\in G} |c_i|(\delta + r) + \sum_{i\in B} |c_i|(-r)$$

*et*

$$-\sum_{i\in M} c_i g_i(y) \geq \sum_{i\in B} |c_i|(\delta + r) + \sum_{i\in G} |c_i|(-r)$$

*donc*

$$|\sum_{i\in M} c_i g_i(x)| + |\sum_{i\in M} c_i g_i(y)| \geq \sum_{i\in M} c_i g_i(x) - \sum_{i\in M} c_i g_i(y) \geq \delta \sum_{i\in M} |c_i| = \delta$$

*ainsi ou bien* $|\sum\limits_{i\in M} c_i g_i(x)| \geq \frac{\delta}{2}$ *ou* $|\sum\limits_{i\in M} c_i g_i(y)| \geq \frac{\delta}{2}$
*D'où (1) est vérifiée.*

**Théorème 3.2.** *Soit B un espace de Banach séparable.*
*Supposons qu'il existe G dans* $B^{**}$ *t.q il n'existe aucune suite* $(b_n)_n$ *de B qui converge vers G pour* $\sigma(B^{**}, B^*)$. $(G \notin \Gamma_1(B))$
*Alors B contient un sous-espace isomorphe à* $l^1(\mathbb{N})$

**démonstration .** *On note K la boule unité de $B^*$ avec la topologie $\sigma(B^*, B)$. $G \notin \Gamma_1(B)$ alors d'après le lemme 3.3, $G_{/K}$ n'est pas une fonction de première classe de Baire sur K.*

*D'après le théorème 3.1, $\exists M$ fermé dans K t.q $G_{/M}$ n'a aucun point de continuité.*

*D'après le lemme 3.4, $\exists L$ fermé dans M et des réels $r, \delta$ avec $\delta > 0$, t.q ($\mho$) du lemme 3.4 soit vérifiée.*
*On suppose $\|G\| = 1$.*
*on pose $\Im = \{g \in C(L) / \ \exists b \in B \ t.q \ \|b\| \leq 1 \ et \ g(x) = x(b) \ \forall x \in L\}$*
*D'après le lemme 2.3, $G_{/L}$ est dans l'adhérence de $\Im$ pour la topologie de la convergence simple.*
*Ainsi par les lemmes 3.5 et 3.6, $\exists (g_n)_n$ dans $\Im$ équivalente à la base usuelle de $l^1(\mathbb{N})$.*
*Il suffit de prendre $(b_n)_n$ dans la boule unité de B t.q $g_i(x) = x(b_i) \ \ \forall i$ et $\forall x \in L$.*
*D'après la proposition 3.1, le sous-espace engendré par les $b_n$ est alors le sous-espace de B isomorphe à $l^1(\mathbb{N})$.*

# 4 Épluchabilité

Dans cette partie, on va introduire la notion d'épluchabilité. On donnera des exemples d'applications et des propriétés essentielles qu'on utilisera par la suite dans la partie concernant l'unicité des préduaux.

**Définition 4.1.** *Soit C un convexe fermé borné d'un espace de Banach E. On dit que C est épluchable si pour tout ensemble $\sigma(E, E^*)$-ouvert non vide $\omega$ de C et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\sigma(E, E^*)$-ouvert non vide $\omega_\epsilon$ de C inclus dans $\omega$ et de diamètre $\leq \epsilon$.*

**Définition 4.2.** *On dit qu'un espace de Banach E est localement uniformément convexe (l.u.c) si*
*pour tout x t.q $\|x\| = 1$ et $(x_n)_n$ dans $B_1(E)$ t.q $\|\frac{x+x_n}{2}\| \longrightarrow 1$*

*on a* $\|x - x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Proposition 4.1.** *Si E est l.u.c alors* $Id : (B_1(E), \sigma(E,E^*)) \longrightarrow (B_1(E), \|.\|)$ *est continue en tout* $x$ *t.q* $\|x\| = 1$.

**démonstration .** *Soit* $x$ *t.q* $\|x\| = 1$ *et* $(x_n)_n$ *dans* $B_1(E)$ *t.q* $x_n \overset{\sigma(E,E^*)}{\longrightarrow} x$
$\|x\| = 1 \Rightarrow \exists x^* \in B_1(E^*)$ *t.q* $< x^*, x >= 1$

$x_n \overset{\sigma(E,E^*)}{\longrightarrow} x$ *donc* $< x^*, x_n > \longrightarrow < x^*, x >= 1$ *alors* $< x^*, \frac{x+x_n}{2} > \longrightarrow 1$

*Or*

$$< x^*, \frac{x+x_n}{2} > \leq \|\frac{x+x_n}{2}\| \leq 1$$

*donc* $\|\frac{x+x_n}{2}\| \longrightarrow 1$ *et comme E l.u.c alors* $\|x - x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
*D'où la continuité en x.*

**Proposition 4.2.**
*Si E est l.u.c alors* $B_1(E)$ *est épluchable.*

**démonstration .** *Soit* $\omega$ *un* $\sigma(E,E^*)$*-ouvert non vide de* $B_1(E)$.

*Soit* $x_0 \neq 0 \in \omega$, $\exists \xi_0, ..., \xi_n \in E^*$ *et* $r > 0$ *t.q*
$\bigcap\limits_{i=0}^{n} \{x \in B_1(E) / < \xi_i, x - x_0 > < r\} \subseteq \omega$

*Soit* $\epsilon > 0$,
*D'après la proposition 4.1,* $Id : (B_1(E), \sigma(E,E^*)) \longrightarrow (B_1(E), \|.\|)$ *est continue en* $\frac{x_0}{\|x_0\|}$

*alors* $\exists \delta_\epsilon$ *et* $\eta_0, ..., \eta_m \in E^*$ *t.q*
$\forall x \in B_1(E)$, *si* $< \eta_j, x - \frac{x_0}{\|x_0\|} > < \delta_\epsilon \;\; \forall j$ *alors* $\|x - \frac{x_0}{\|x_0\|}\| < \frac{\epsilon}{2\|x_0\|}$

*ainsi* $\forall x \in B_{\|x_0\|}(E)$, *si* $< \eta_j, x - x_0 > < \delta_\epsilon \|x_0\| = \gamma_\epsilon \;\; \forall j$ *alors* $\|x - x_0\| < \frac{\epsilon}{2}$

*On pose :*
$\omega_\epsilon = \{x \in B_1(E) \cap B_{\|x_0\|}(E) / < \xi_i, x - x_0 > < r$ *et* $< \eta_j, x - x_0 > < \gamma_\epsilon \;\; \forall i, j\}$
$\omega_\epsilon$ *est un* $\sigma(E,E^*)$*-ouvert non vide de diamètre* $\leq \epsilon$ *et* $\omega_\epsilon \subseteq \omega$

*D'où $B_1(E)$ est épluchable.*

**Lemme 4.1.** *Soit $E$ un espace de Banach.*
*$+$ et $.$ sont continues pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.*

**démonstration .**

- *Soit $x, y \in E$, et $U$ un $\sigma(E, E^*)$-voisinage de $x + y$.*
  $\exists \xi_1, ..., \xi_n \in E^*$ *et* $r > 0$ *t.q*
  $\bigcap_{i=1}^{n} \{z \in E/ \ <\xi_i, z - (x + y)> \ < r\} \subseteq U$

  *Soit* $U_1 = \bigcap_{i=1}^{n} \{z \in E/ \ <\xi_i, z - x> \ < \frac{r}{2}\}$
  *et* $U_2 = \bigcap_{i=1}^{n} \{z \in E/ \ <\xi_i, z - y> \ < \frac{r}{2}\}$
  *$U_1$ (resp $U_2$) est un $\sigma(E, E^*)$-ouvert contenant $x$ (resp $y$),*
  *et $U_1 + U_2 \subseteq U$*
  *D'où $+$ est continue pour $\sigma(E, E^*)$.*

- *Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
  *Soit $U$ un $\sigma(E, E^*)$-voisinage de $\lambda.x$*
  $\exists \xi_1, ..., \xi_n \in E^*$ *et* $r>0$ *t.q* $\bigcap_{i=1}^{n} \{z \in E/ \ <\xi_i, z - \lambda.x> \ < r\} \subseteq U$

  *on pose*
  $U_1 = \bigcap_{i=1}^{n} \{z \in E/ \ <\xi_i, z - x> \ < \frac{r}{2|\lambda|}\}$
  $D = \bigcap_{i=1}^{n} \{t \in \mathbb{K}/ \ |t - \lambda| < \frac{r}{2[\frac{r}{2|\lambda|} + <\xi_i, x>]}\}$
  *Pour $t \in D$ et $z \in U_1$, on a*
  $| <\xi_i, t.z - \lambda.x> | \leq |t - \lambda|.| <\xi_i, z> | + |\lambda|.| <\xi_i, z - x> | < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

  *ainsi $D.U_1 \subseteq U$*
  *D'où $.$ est continue pour $\sigma(E, E^*)$.*

**Proposition 4.3.** *Soit $E$ un espace de Banach.*
*Si $E$ a la propriété de Radon-Nicodym alors $B_1(E)$ est épluchable.*

**démonstration .** *Notons $F_E$ l'ensemble des points fortement exposés de $B_1(E)$.*
*$E$ a la propriété de Radon-Nicodym alors $B_1(E)$ est l'enveloppe convexe fermée (fortement) de $F_E$ c.à.d $B_1(E) = \overline{conv} F_E$.*

*Soit* $\omega$ *un* $\sigma(E, E^*)$*-ouvert de* $B_1(E)$.
$\omega$ *est un ouvert pour la topologie faible donc c'est un ouvert pour la topologie forte alors* $\omega \cap convF_E \neq \emptyset$
$\exists x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in \omega$ *avec* $x_i \in F_E$ *et* $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

$\omega$ *est* $\sigma(E, E^*)$*-ouvert* $\Rightarrow \exists \xi_1, ..., \xi_n \in E^*$ *et* $\exists r > 0$ *t.q*
$U_0 = \bigcap_{i=1}^{m} \{y \in B_1(E)/ \ < \xi_i, y - x > < r\} \subseteq \omega$

*Soit* $\epsilon > 0$
$\forall i = 1, ..., n$, $x_i$ *est fortement exposé.*
$\Rightarrow \eta_i \in E^*$ *et* $\delta_{\epsilon,i}$ *t.q* $< \eta_i, x_i >= 1$ *et*
$diam(\{y \in B_1(E)/ \ < \eta_i, y > > 1 - \delta_{\epsilon,i}\}) \leq \epsilon$

*On pose* $U_i = \{y \in B_1(E)/ \ < \eta_i, y > > 1 - \delta_{\epsilon,i}\}$ *et* $\delta_\epsilon = \min_{i=1,..,n} \delta_{\epsilon,i}$
*On pose* $U_\epsilon = t_1 U_1 + ... + t_n U_n$ *c'est un* $\sigma(E, E^*)$*-ouvert car + et . sont continues pour la topologie* $\sigma(E, E^*)$ *d'après le lemme 4.1.*
*Soit* $\omega_\epsilon = U_\epsilon \cap U_0 \neq \emptyset$ *car* $x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in U_\epsilon$ *(car* $x_i \in U_i$*) et* $x \in U_0$.

$\omega_\epsilon$ *est* $\sigma(E, E^*)$*-ouvert et le diamètre de* $\omega_\epsilon$ *est* $\leq \epsilon$
*car si* $y, z \in \omega_\epsilon \Rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} t_i y_i$ *et* $z = \sum_{i=1}^{n} t_i z_i$
$\|y - z\| \leq \sum_{i=1}^{n} t_i \|y_i - z_i\| \leq \epsilon \sum_{i=1}^{n} t_i = \epsilon$
*Donc* $B_1(E)$ *est épluchable.*

**Lemme 4.2.** *Si E est un espace de Baire alors tout ouvert non vide de E est de Baire.*

**démonstration .** *Soit U un ouvert non vide de E et soit* $(O'_n)_n$ *suite d'ouverts denses dans U.*
*Il s'agit de montrer que* $\bigcap_n O'_n$ *est dense dans U.*

*Soit* $O_n = \complement \overline{U} \cup O'_n$ *ouvert de E.*
*Montrons que* $(O_n)_n$ *est une suite d'ouverts denses dans E.*

*Soit O ouvert non vide de E.*

*Si* $O \cap U = \emptyset \Rightarrow O \cap \overline{U} = \emptyset \Rightarrow O \subseteq \complement\overline{U} \Rightarrow O \cap O_n \neq \emptyset$

*Si* $O \cap U \neq \emptyset$ *alors c'est un ouvert de* $U$.
$\Rightarrow O'_n \cap (O \cap U) \neq \emptyset$ *car* $O'_n$ *est dense dans* $U$.
$\Rightarrow O \cap O_n \neq \emptyset$

*Donc* $(O_n)_n$ *est une suite d'ouverts denses dans* $E$.
*Or* $E$ *est de baire alors* $\bigcap\limits_n O_n$ *est dense dans* $E$.

*Soit maintenant* $O'$ *ouvert non vide de* $U$. *C'est un ouvert de* $E$ *car* $U$ *ouvert de* $E$.
*donc* $O' \cap (\bigcap\limits_n O_n) \neq \emptyset \Rightarrow O' \cap (\complement\overline{U} \cup \bigcap\limits_n O'_n) \neq \emptyset$
*Or* $O' \cap \complement\overline{U} = \emptyset$ *car* $O' \subseteq U$
*ainsi* $O' \cap (\bigcap\limits_n O'_n) \neq \emptyset$ *et* $\bigcap\limits_n O'_n$ *est donc dense dans* $U$.
*D'où* $U$ *est de Baire.*

**Proposition 4.4.** *Soit* $E$ *un espace de Banach.*
*Si* $E$ *est séparable et* $(B_1(E), \sigma(E, E^*))$ *est un espace de Baire alors* $B_1(E)$ *est épluchable.*

**démonstration .** *Soit* $U$ *un* $\sigma(E, E^*)$*-ouvert non vide de* $B_1(E)$.
*Soit* $\epsilon > 0$ *et* $S = \{x \in E / \ \|x\| \leq \frac{\epsilon}{2}\}$.

*Comme* $E$ *est séparable alors* $\forall x \in B_1(E)$, $\exists x_n$ *dans* $B_1(E)$ *t.q* $\|x - x_n\| \leq \frac{\epsilon}{2}$
*donc* $x \in (x_n + S) \cap B_1(E)$
*D'où* $\exists (x_n)_n$ *dans* $B_1(E)$ *t.q* $B_1(E) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (x_n + S) \cap B_1(E)$.

$\forall n$, $x_n + S$ *est* $\sigma(E, E^*)$*-fermé car si* $x_n + s_k \xrightarrow[k \to \infty]{\sigma(E,E^*)} y$ *alors*
$\forall \xi \in B_1(E^*)$, $| < \xi, y - x_n > | = \lim\limits_k | < \xi, s_k > | \leq \frac{\epsilon}{2}$
*Donc* $\|y - x_n\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ *ainsi* $y \in x_n + S$.

$U = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (x_n + S) \cap U$ *qui sont* $\sigma(E, E^*)$*-fermés dans* $U$.
*Or* $(B_1(E), \sigma(E, E^*))$ *est de Baire et* $U$ *est* $\sigma(E, E^*)$*-ouvert dans* $B_1(E)$ *donc d'après le lemme4.2,*
*on a* $(U, \sigma(E, E^*))$ *est de Baire.*

*ainsi* $\exists n_0 /\ U_\epsilon = \overbrace{(x_{n_0} + S) \cap U}^{\circ} \neq \emptyset$ *(où l'intérieur est pour la topologie* $\sigma(E, E^*)$*).*

$U_\epsilon$ *est* $\sigma(E, E^*)$*-ouvert et* $\subseteq U$ *et de diamètre* $\leq \epsilon$
*Donc* $B_1(E)$ *est épluchable.*

**Proposition 4.5.** *Soit* $E$ *un espace de Banach.*
*Si* $B_1(E)$ *est épluchable alors* $(B_1(E), \sigma(E, E^*))$ *est de Baire.*

**démonstration .** *Soit* $(U_n)_{n \geq 1}$ *suite de* $\sigma(E, E^*)$*-ouverts qui sont* $\sigma(E, E^*)$*-denses dans* $B_1(E)$*.*
*Montrons que* $\bigcap\limits_n U_n$ *est* $\sigma(E, E^*)$*-dense dans* $B_1(E)$*.*

*Soit* $x_0 \in B_1(E)$ *et* $\xi_0 \in E^*$ *et* $r_0 > 0$
*On note* $B_{\xi_0}(x_0, r_0) = \{x \in B_1(E) /\ | < \xi_0, x - x_0 > | \ < r_0\}$ *c'est un* $\sigma(E, E^*)$*-ouvert.*
*Pour simplifier les notations, on supposera que les* $B_\xi(x, r)$ *forment un système fondamental de voisinages* $\sigma(E, E^*)$*-ouverts de* $B_1(E)$ *à la place de* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{\xi_i}(x, r)$*.*

$U_1$ *est* $\sigma(E, E^*)$*-dense* $\Rightarrow U_1 \cap B_{\xi_0}(x_0, r_0) \neq \emptyset$ *et c'est un* $\sigma(E, E^*)$*-ouvert de* $B_1(E)$
$B_1(E)$ *épluchable* $\Rightarrow \exists r_1 \in ]0, \frac{r_0}{2}[$ *et* $\xi_1 \in E^*$ *et* $x_1$ *t.q*
$B_{\xi_1}(x_1, r_1) \subseteq U_1 \cap B_{\xi_0}(x_0, r_0)$ *avec* $diam B_{\xi_1}(x_1, r_1) \leq r_0$

$U_2$ *est* $\sigma(E, E^*)$*-dense* $\Rightarrow U_2 \cap B_{\xi_1}(x_1, r_1) \neq \emptyset$ *et c'est un* $\sigma(E, E^*)$*-ouvert de* $B_1(E)$
$B_1(E)$ *épluchable* $\Rightarrow \exists r_2 \in ]0, \frac{r_1}{2}[$ *et* $\xi_2 \in E^*$ *et* $x_2$ *t.q*
$B_{\xi_2}(x_2, r_2) \subseteq U_2 \cap B_{\xi_1}(x_1, r_1)$ *avec* $diam B_{\xi_2}(x_2, r_2) \leq r_1$

*une fois construits* $x_0, x_1, ..., x_n$
$U_{n+1}$ *est* $\sigma(E, E^*)$*-dense* $\Rightarrow U_{n+1} \cap B_{\xi_n}(x_n, r_n) \neq \emptyset$ *et c'est un* $\sigma(E, E^*)$*-ouvert de* $B_1(E)$
$B_1(E)$ *épluchable* $\Rightarrow \exists r_{n+1} \in ]0, \frac{r_n}{2}[$ *et* $\xi_{n+1} \in E^*$ *et* $x_{n+1}$ *t.q*
$B_{\xi_{n+1}}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq U_{n+1} \cap B_{\xi_n}(x_n, r_n)$ *avec* $diam B_{\xi_{n+1}}(x_{n+1}, r_{n+1}) \leq r_n$

*On a* $0 < r_n < 2^{-n} r_0 \Rightarrow r_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

*La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy (pour la topologie forte)*
*car pour $\epsilon > 0$, $\exists n_0 / \ \forall n \geq n_0,\ r_n < \epsilon$*
*si $k, l > n_0$, $B_{\xi_k}(x_k, r_k) \subseteq B_{\xi_{n_0+1}}(x_{n_0+1}, r_{n_0+1})$ et $B_{\xi_l}(x_l, r_l) \subseteq B_{\xi_{n_0+1}}(x_{n_0+1}, r_{n_0+1})$*
*$\Rightarrow x_k$ et $x_l \in B_{\xi_{n_0+1}}(x_{n_0+1}, r_{n_0+1})$ et $diam B_{\xi_{n_0+1}}(x_{n_0+1}, r_{n_0+1}) \leq r_{n_0}$*
*donc $\|x_k - x_l\| \leq diam B_{\xi_{n_0+1}}(x_{n_0+1}, r_{n_0+1}) \leq r_{n_0} < \epsilon$*
*ainsi $(x_n)_n$ est de Cauchy.*

*Comme $B_1(E)$ est de Banach alors $(x_n)_n$ converge (pour la topologie forte) vers $x$.*
*$\forall n \geq 0$ et $\forall k \geq 1$, $B_{\xi_{n+k}}(x_{n+k}, r_{n+k}) \subseteq B_{\xi_n}(x_n, r_n)$*
*$\Rightarrow |<\xi_n, x_{n+k} - x_n>| < r_n \quad \forall k \geq 1$*
*$k \to \infty \Rightarrow |<\xi_n, x - x_n>| < r_n$ car $\xi_n$ continue.*
*donc $x \in B_{\xi_n}(x_n, r_n) \quad \forall n \geq 0$*

*Donc $x \in \bigcap_{n\geq 1} B_{\xi_n}(x_n, r_n) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} U_n$ et $x \in B_{\xi_0}(x_0, r_0)$*
*$\Rightarrow B_{\xi_0}(x_0, r_0) \cap (\bigcap_{n\geq 1} U_n) \neq \emptyset$ et ceci $\forall x_0 \in B_1(E)$ et $\forall \xi_0 \in E^*$ et $\forall r_0 > 0$*
*donc $\bigcap_{n\geq 1} U_n$ est $\sigma(E, E^*)$-dense dans $B_1(E)$.*
*D'où $(B_1(E), \sigma(E, E^*))$ est de Baire.*

# 5 Unicité des préduaux des espaces de Banach

On a traité jusqu'à présent l'existence des préduaux et on a vu que lorsque $E^*$ a la propriété de Radon-Nicodym, $(R_E)_\perp$ était un prédual de E. Par la suite, on ne s'interessera qu'à l'unicité de ces préduaux et on utilisera les résultats des parties 3 et 4.

**Définition 5.1.** *Soit E un espace de Banach.*
*On dit que E est unique prédual normique de $E^*$ si pour tout espace de Banach F t.q $F^*$ soit isométrique à $E^*$, et toute isométrie I de $E^*$ sur $F^*$ on a : ${}^tI \circ i_F(F) = i_E(E)$.*

**Proposition 5.1.** *Si E est unique prédual normique de $E^*$, alors tout Banach F t.q $F^*$ soit isométrique à $E^*$ est isométrique à E.*

**démonstration .** *Soit* $I : E^* \longrightarrow F^*$ *l'isométrie. On a alors :*

$$\begin{array}{ccc} F^{**} & \xrightarrow{{}^tI} & E^{**} \\ {\scriptstyle i_F}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle i_E{}^{-1}} \\ F & & E \end{array}$$

*ainsi* $i_E{}^{-1} \circ {}^tI \circ i_F$ *est une isomtrie de* $F$ *sur* $E$

*elle est bien définie car* ${}^tI \circ i_F(F) = i_E(E)$

**Lemme 5.1.** *Soit* $E$ *un espace de Banach.*
$R'_E = \{f \in E^{(3)} /\ ker f \cap B_1(E^{**})$ *est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})\}$.
*Si* $R'_E$ *est un espace vectoriel alors* $E$ *est l'unique prédual normique de* $E^*$.

**démonstration .** $E \equiv i_E(E)$ *donc* $i_{E^*}(E^*) \equiv E^* \equiv (i_E(E))^*$.

*En appliquant la proposition 2.1 avec* $Z = i_E(E)$ *et en remplaçant* $E$ *par* $E^*$ *on a* $E^{(3)} = i_{E^*}(E^*) \oplus (i_E(E))^{\perp}$.

*Remarquons que* $R'_E = R_{E^*}$ *déjà définie dans le lemme 2.2.*
*Ainsi d'après le lemme 2.2,* $R'_E \cap i_{E^*}(E^*) = \{0\}$.

*Montrons que* $(i_E(E))^{\perp} \subseteq R'_E$

*en effet : si* $f \in (i_E(E))^{\perp}$ *alors* $i_E(E) \subseteq ker f$.
*D'après le lemme 2.3,* $i_E(E) \cap B_1(E^{**})$ *est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$ *ainsi* $ker f \cap B_1(E^{**})$ *est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$ *d'où* $f \in R'_E$.

$$\left.\begin{array}{l} E^{(3)} = i_{E^*}(E^*) \oplus i_E(E)^{\perp} \\ i_{E^*}(E^*) \cap R'_E = \{0\} \\ i_E(E)^{\perp} \subseteq R'_E \\ R'_E \text{ espace vectoriel} \end{array}\right\} \Rightarrow R'_E = i_E(E)^{\perp} \text{ et donc } (R'_E)_{\perp} = i_E(E).$$

*Soit* $F$ *Banach t.q* $F^*$ *soit isométrique à* $E^*$.
*Soit* $I : E^* \longrightarrow F^*$ *une isométrie.*

*Montrons que* ${}^tI \circ i_F(F) = i_E(E)$ *; Pour celà que* ${}^tI \circ i_F(F) = (R'_E)_{\perp}$.

*On a* $({}^tI \circ i_F(F))^{\perp} \subseteq R'_E$ *:*
*en effet, si* $f \in ({}^tI \circ i_F(F))^{\perp}$ *alors* ${}^tI \circ i_F(F) \subseteq ker f$.
*D'après le lemme 2.3,* ${}^tI \circ i_F(F) \cap B_1(E^{**})$ *est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$ *alors* $ker f \cap B_1(E^{**})$ *est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$ *d'où* $f \in R'_E$.

*D'autre part,* ${}^tI \circ i_F(F) \subseteq E^{**}$ *et* $({}^tI \circ i_F(F))^* \equiv F^* \equiv E^*$
*En appliquant la proposition 2.1 avec* $Z = {}^tI \circ i_F(F)$ *et en remplaçant E par* $E^*$ *on a* $E^{(3)} = i_{E^*}(E^*) \oplus ({}^tI \circ i_F(F))^{\perp}$.

$$\left.\begin{array}{l} E^{(3)} = i_{E^*}(E^*) \oplus ({}^tI \circ i_F(F))^{\perp} \\ i_{E^*}(E^*) \cap R'_E = \{0\} \\ ({}^tI \circ i_F(F))^{\perp} \subseteq R'_E \\ R'_E \text{ espace vectoriel} \end{array}\right\} \Rightarrow R'_E = ({}^tI \circ i_F(F))^{\perp}$$

*donc*$(R'_E)_{\perp} = {}^tI \circ i_F(F)$.
*D'où* ${}^tI \circ i_F(F) = i_E(E) = (R'_E)_{\perp}$. *c.q.f.d*

**Lemme 5.2.** *Soit E Banach. Supposons qu'il existe un sous-ensemble A de* $B_1(E^{**})$, $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense tel que pour tout sous-ensemble convexe X de* $B_1(E^{**})$*, fortement fermé et* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$*, on a* $A \subseteq X$*. Alors E est l'unique prédual normique de* $E^*$.

**démonstration .** *On va montrer que* $R'_E$ *est un espace vectoriel et utiliser le lemme 5.1.*

*Soit* $f, g \in R'_E$
$X_1 = kerf \cap B_1(E^{**})$ *et* $X_2 = kerg \cap B_1(E^{**})$ *sont 2 sous-ensembles convexes fermés et* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$
*alors* $A \subseteq X_1$ *et* $A \subseteq X_2$ *donc* $A \subseteq kerf \cap kerg \cap B_1(E^{**})$
*or* $kerf \cap kerg \subseteq ker(\lambda f + \mu g)$ *alors* $A \subseteq ker(\lambda f + \mu g) \cap B_1(E^{**})$

*Comme A est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$ *alors* $ker(\lambda f + \mu g) \cap B_1(E^{**})$ *est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$
*Ainsi* $\lambda f + \mu g \in R'_E$ *et* $R'_E$ *est un espace vectoriel.*

**Lemme 5.3.** *Soit E Banach. On note C l'ensemble des points de continuité de*
*Id :* $(B_1(E^{**}), \sigma(E^{**}, E^*)) \longrightarrow (B_1(E^{**}), \|.\|)$
*Si conv(C) est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$ *alors E est unique prédual normique de* $E^*$.

**démonstration .** *Vérifions que les hypothèses du lemme 5.2 sont vérifiées pour* $A = conv(C)$.

*Soit $X$ un sous-ensemble convexe fermé $\sigma(E^{**},E^*)$-dense dans $B_1(E^{**})$.*
*Montrons que $conv(C) \subseteq X$ :*

*Soit $x \in C$, comme $X$ est $\sigma(E^{**},E^*)$-dense dans $B_1(E^{**})$ alors*
$\exists (x_l)_l$ *dans $X$ t.q* $x_l \overset{\sigma(E^{**},E^*)}{\longrightarrow} x$

*or Id :* $(B_1(E^{**}),\sigma(E^{**},E^*)) \longrightarrow (B_1(E^{**}),\|.\|)$ *est continue en $x$*
*alors* $x_l \overset{fortement}{\longrightarrow} x$

*Comme $X$ est fermé alors $x \in X$ donc $C \subseteq X$*
*Comme $X$ convexe alors $conv(C) \subseteq X$*
*D'après le lemme 5.2, $E$ est unique prédual normique de $E^*$.*

**Lemme 5.4.** *Si $x_0 \in B_1(E)$ est fortement exposé dans $B_1(E)$, alors $i_E(x_0)$ est faiblement fortement exposé dans $B_1(E^{**})$*

**démonstration .** *Soit $\epsilon > 0$,*

$x_0$ *fortement exposé* $\Rightarrow \exists y^* \in E^*$ *t.q* $< y^*, x_0 >= 1$ *et* $\exists \delta > 0$ *t.q*
$diam\{x \in B_1(E)/ < y^*, x > > 1-\delta\} \leq \epsilon$

*On a alors* $< i_E(x_0), y^* >= 1$
*Reste à montrer qu'*$\delta' > 0/\ diam\{\xi \in B_1(E^{**})/ < \xi, y^* > > 1-\delta'\} \leq \epsilon$

*Montrons d'abord que* $i_E(\{x \in B_1(E)/\ < y^*, x > > 1-\frac{\delta}{2}\})$ *est*
$\sigma(E^{**},E^*)$*-dense dans* $H = \{\xi \in B_1(E^{**})/\ < \xi, y^* > > 1-\frac{\delta}{2}\}$ *(A)*

*en effet, si $\xi \in H$*
*Comme $i_E(B_1(E))$ est $\sigma(E^{**},E^*)$-dense dans $B_1(E^{**})$, alors*
$\exists (x_n)_n$ *dans* $B_1((E)$ *t.q* $i_E(x_n) \overset{\sigma(E^{**},E^*)}{\longrightarrow} \xi$
$\Rightarrow < \xi, y^* >= \lim_n < y^*, x > > 1-\frac{\delta}{2}$
$\Rightarrow \exists n_0/\ \forall n \geq n_0,\ < y^*, x_n > > 1-\frac{\delta}{2}$
*ainsi* $(x_n)_{n\geq n_0}$ *est dans* $\{x \in B_1(E)/\ < y^*, x > > 1-\frac{\delta}{2}\}$ *et* $i_E(x_n) \overset{\sigma(E^{**},E^*)}{\longrightarrow} \xi$

*D'où (A) et* $H = \overline{i_E(\{x \in B_1(E)/\ < y^*, x > > 1-\frac{\delta}{2}\})}^{\sigma(E^{**},E^*)}$.

*ainsi* $H \subseteq i_E(\{x \in B_1(E) / \ < y^*, x > \geq 1 - \frac{\delta}{2}\})$

*d'où* $diam H \leq diam\ i_E(\{x \in B_1(E) / \ < y^*, x > > 1 - \delta\})$
$diam\ i_E(\{x \in B_1(E) / \ < y^*, x > > 1 - \delta\}) = diam\{x \in B_1(E) / \ < y^*, x > > 1 - \delta\}$ *car* $i_E$ *isométrie.*
*D'où* $diam H \leq \epsilon$

*ainsi* $\exists \delta' = \frac{\delta}{2} / \ diam\{\xi \in B_1(E^*) / \ < \xi, y^* > > 1 - \delta'\} \leq \epsilon$
*Donc* $i_E(x_0)$ *est faiblement fortement exposé dans* $B_1(E^*)$.

**Théorème 5.1.** *Si* $E^*$ *ne contient pas de sous-espace isomorphe à* $l^1(\mathbb{N})$*, alors* $E$ *est unique prédual normique de son dual.*

**démonstration .** *On va montrer que* $R'_E$ *est un espace vectoriel et appliquer le lemme 5.1.*

*Soit* $f, g \in R'_E$*, on a* $ker f \cap B_1(E^{**})$ *et* $ker g \cap B_1(E^{**})$ *sont* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-denses dans* $B_1(E^{**})$.
$E^* \not\supseteq l^1(\mathbb{N})$ *alors d'après le théorème 3.2,* $\forall f \in E^{**}$ $f$ *est de première classe de Baire de* $E^{**}$ *et donc d'après le théorème 3.1, l'ensemble des points de continuité de* $f$ *est un* $G_\delta$*-dense.*

*Notons* $C_f = \{pts\ de\ continuité\ de\ f : (B_1(E^{**}), \sigma(E^{**}, E^*)) \longrightarrow \mathbb{R}\}$
*et* $C_g = \{pts\ de\ continuité\ de\ g : (B_1(E^{**}), \sigma(E^{**}, E^*)) \longrightarrow \mathbb{R}\}$

$C_f$ *et* $C_g$ *sont des* $G_\delta$*-denses de* $(B_1(E^{**}, E^*), \sigma(E^{**}, E^*))$.

*Comme* $ker f \cap B_1(E^{**})$ *est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$ *alors* $f$ *s'annule sur tous ses points de continuité.*
*alors* $C_f \subseteq ker f \cap B_1(E^{**})$*, de même* $C_g \subseteq ker g \cap B_1(E^{**})$.
*d'où* $C_f \cap C_g \subseteq ker f \cap ker g \cap B_1(E^{**}) \subseteq ker(\lambda f + \mu g) \cap B_1(E^{**})$

*or* $C_f \cap C_g$ *est une intersection de 2* $G_\delta$*-denses donc c'est un* $G_\delta$*-dense*
*donc* $C_f \cap C_g$ *est dense car* $(B_1(E^{**}), \sigma(E^{**}, E^*))$ *est compact donc de Baire.*
*parsuite* $ker(\lambda f + \mu g) \cap B_1(E^{**})$ *est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$
*ainsi* $\lambda f + \mu g \in R'_E$ *et* $R'_E$ *est donc un espace vectoriel.* *c.q.f.d*

**Théorème 5.2.** *Si $E$ a la propriété de Radon-Nicodym alors $E$ est unique prédual normique de son dual.*

**démonstration .** *Notons $F_E = \{x \in B_1(E) /\ x$ est fortement exposé dans $B_1(E)\}$.*
*$E$ a la propriété de R.N $\Rightarrow B_1(E) = conv(F_E)$*

*On a $i_E(conv(F_E)) = conv(i_E(F_E))$ :*
*en effet, $i_E(conv(F_E))$ est convexe (car $i_E$ linéaire) contenant $i_E(F_E)$*
*$\Rightarrow conv(i_E(F_E)) \subseteq i_E(conv(F_E))$*
*$i_E(F_E) \subseteq i_E(B_1(E)) \Rightarrow conv(i_E(F_E)) \subseteq i_E(B_1(E))$*
*on peut alors appliquer ${i_E}^{-1}$, ${i_E}^{-1}(conv(i_E(F_E)))$ est convexe contenant $F_E$*
*$\Rightarrow conv(F_E) \subseteq {i_E}^{-1}(conv(i_E(F_E)))$*
*$\Rightarrow i_E(conv(F_E)) \subseteq conv(i_E(F_E))$*

*D'après le lemme 5.4, on a $i_E(E) \subseteq H = \{\xi \in B_1(E^{**}) /\ \xi$ faiblement fortement exposé$\}$*

*D'après le lemme 2.1, on a $H \subseteq C$ où $C$ est l'ensemble des points de continuité de Id : $(B_1(E^{**}), \sigma(E^{**}, E^*)) \longrightarrow (B_1(E^{**}), \|.\|)$*

*ainsi $conv(i_E(F_E)) \subseteq conv(C)$*
*Or $conv(i_E(F_E)) = i_E(conv(F_E)) = i_E(B_1(E))$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-dense dans $B_1(E^{**})$*
*donc $conv(C)$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-dense dans $B_1(E^{**})$*
*D'après le lemme 5.3, $E$ est unique prédual normique de son dual.*

**Lemme 5.5.** *Soit $E$ un espace de Banach.*
*Si $x$ est un point de continuité de $Id : (B_1(E), \sigma(E, E^*)) \longrightarrow (B_1(E), \|.\|)$ alors*
*$i_E(x)$ est un point de continuité de $Id : (B_1(E^{**}), \sigma(E^{**}, E^*)) \longrightarrow (B_1(E^{**}), \|.\|)$.*

**démonstration .** *Soit $\epsilon > 0$, $\exists x_1^*, ..., x_n^* \in E^*$ et $\delta > 0$ t.q*
*si $y \in B_1(E) / < x_i^*, x - y > < \delta\ \forall i$ alors $\|x - y\| \leq \epsilon$ (continuité en $x$)*

*soit $z \in B_1(E^{**})$ est t.q $|x_i^*(i_E(x) - z)| < \delta \quad \forall i \leq n$*

*$\exists y_k \in B_1(E)$ t.q $y_k \overset{\sigma(E^{**}, E*)}{\longrightarrow} z$*

*ainsi* $\exists k_0$ *t.q* $\forall k \geq k_0$ *et* $\forall i$, $|x_i^*(x - y_k)| < \delta$
*donc* $\|x - y_k\| < \epsilon \quad \forall k \geq k_0$
*alors* $\|x - z\| \leq \epsilon$ *car si* $\|x - z\| > \epsilon$ *alors*
$\exists x^* \in B_1(E^*)$ *t.q* $|x^*(x - z)| > \epsilon$ *donc à partir d'un certain rang on aurait* $|x^*(x - z)| > \epsilon$ *contradiction.*
*D'où la continuité de* $Id : (B_1(E^{**}), \sigma(E^{**}, E^*)) \longrightarrow (B_1(E^{**}), \|.\|)$ *en* $i_E(x)$.

**Théorème 5.3.** *Soit E un espace de Banach.*
*Si E est l.u.c alors E est l'unique prédual normique de son dual.*

**démonstration .** *On note* $S = \{x \in E / \ \|x\| = 1\}$
*E est l.u.c alors d'après la proposition 4.1,*
$Id : (B_1(E), \sigma(E, E^*)) \longrightarrow (B_1(E), \|.\|)$ *est continue en tout point de S.*
*D'après le lemme 5.5,* $Id : (B_1(E^{**}), \sigma(E^{**}, E^*)) \longrightarrow (B_1(E^{**}), \|.\|)$ *en tout point de* $i_E(S)$.

*On note C l'ensemble des points de continuité de*
$Id : (B_1(E^{**}), \sigma(E^{**}, E^*)) \longrightarrow (B_1(E^{**}), \|.\|)$.
*On a* $i_E(S) \subseteq C$ *donc* $conv\ i_E(S) \subseteq convC$.
*Or* $conv\ i_E(S) = i_E(convS)$ *(la démonstration est similaire à celle vue dans le théorème 5.2) et* $convS = B_1(E)$.
*ainsi* $i_E(B_1(E)) \subseteq convC$.

*D'après le lemme 2.3,* $i_E(B_1(E))$ *est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$ *donc* $convC$ *est* $\sigma(E^{**}, E^*)$*-dense dans* $B_1(E^{**})$.
*D'après le lemme 5.3, E est unique prédual normique de son dual.*

**Théorème 5.4.** *Soit E un espace de Banach.*
*Si* $B_1(E)$ *est épluchable alors E est unique prédual normique de son dual.*

**démonstration .** *Soit* $\epsilon > 0$
*On note* $A_\epsilon$ *la réunion des* $\sigma(E, E^*)$*-ouverts de* $B_1(E)$ *de diamètre* $\leq \epsilon$.

$B_1(E)$ *est épluchable* $\Rightarrow \forall U$ $\sigma(E, E^*)$*-ouvert de* $B_1(E)$, $\exists U_\epsilon \subseteq U$ *avec* $U_\epsilon$ $\sigma(E, E^*)$*-ouvert de diamètre* $\leq \epsilon$ *donc* $U \cap A_\epsilon \neq \emptyset$
*Ainsi* $A_\epsilon$ *est* $\sigma(E, E^*)$*-dense dans* $B_1(E)$.

*$(A_{\frac{1}{n}})_n$ est une suite de $\sigma(E,E^*)$-ouverts qui sont $\sigma(E,E^*)$-denses dans $B_1(E)$.*
*D'après la proposition 4.5, $(B_1(E),\sigma(E,E^*))$ est de Baire.*
*ainsi $\bigcap\limits_n A_{\frac{1}{n}}$ est $\sigma(E,E^*)$-dense dans $B_1(E)$.*

*On note $\Omega$ l'ensemble des points de continuité de*
*$Id : (B_1(E),\sigma(E,E^*)) \longrightarrow (B_1(E),\|.\|)$*

$$\begin{aligned} x\in\Omega &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ \exists U\ \sigma(E,E^*)\text{-ouvert t.q } x\in U\subseteq B(x,\frac{1}{2n}) \\ &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ x\in A_{\frac{1}{n}} \\ &\Leftrightarrow x\in\bigcap_n A_{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

*Donc $\Omega=\bigcap\limits_n A_{\frac{1}{n}}$ est $\sigma(E,E^*)$-dense dans $B_1(E)$.*
*ainsi $i_E(\Omega)$ est $\sigma(E^{**},E^*)$-dense dans $i_E(B_1(E))$ qui est $\sigma(E^{**},E^*)$-dense dans $B_1(E^{**})$*
*D'où $i_E(\Omega)$ est $\sigma(E^{**},E^*)$-dense dans $B_1(E^{**})$.*

*D'après le lemme 5.5, $i_E(\Omega)\subseteq C$.*
*ainsi $convC$ est $\sigma(E^{**},E^*)$-dense dans $B_1(E^{**})$ et d'après le lemme 5.3, E est unique prédual normique de son dual.*

**Remarque .** *On a vu que si E est l.u.c alors $B_1(E)$ est épluchable (proposition 4.2), de même si E a la propriété de Radon-Nicodym (proposition 4.3). Ainsi avec le théorème 5.4, on retrouve les résultats trouvés dans les théorèmes 5.2 et 5.3 et le fait que si E est l.u.c ou a la propriété de Radon-Nicodym alors E est unique prédual normique de son dual.*

Donnons maintenant quelques applications du fait que E soit unique prédual normique de son dual.

**Théorème 5.5.** *Soit E un espace de Banach unique prédual normique de son dual.*
*Si F espace de Banach tel qu'il existe une isométrie I de $E^*$ sur $F^*$. Alors I est la transposée d'une isométrie de F sur E.*

**démonstration .** *$I : E^* \longrightarrow F^*$ isométrie.*
*Comme E unique prédual de $E^*$ alors ${}^tI\circ i_F(F)=i_E(E)$.*

$$\begin{tikzcd} F^{**} \arrow[r, "{}^tI"] & E^{**} \\ F \arrow[u, "i_F"] \arrow[r, dotted, "f"] & E \arrow[u, "i_E"'] \end{tikzcd}$$

*Soit alors* $f = {i_E}^{-1} \circ {}^tI \circ i_F$

$f$ *est bien définie car* ${}^tI \circ i_F(F) = i_E(E)$ *et est évidemment une isométrie.*

*Reste à vérifier que* ${}^tf = I$
*Soit* $x \in E^*$, *montrons que* ${}^tf(x) = I(x)$.
*pour celà que* $< {}^tf(x), y > = < I(x), y > \quad \forall y \in F$.

$$\begin{aligned} < {}^tf(x), y > &= < x, f(y) > \\ &= < {}^tI \circ i_F(y), x > \\ &= < i_F(y), I(x) > \\ &= < I(x), y > \qquad c.q.f.d \end{aligned}$$

**Remarque .** *Si E espace de Banach unique prédual de* $E^*$. *Alors toute isométrie de* $E^*$ *est la transposée d'une isométrie de E. (Il suffit d'appliquer le théorème 5.5 avec* $F = E$*).*

**Proposition 5.2.** *Soit E espace de Banach unique prédual de* $E^*$ *et tel que* $E^*$ *est unique prédual de* $E^{**}$.
*Alors toute isométrie I de* $E^{**}$ *est la bitransposée d'une ismoétrie de E et* $i_E(E) = I(i_E(E))$.

**démonstration .** $E^*$ *est unique prédual de* $E^{**}$ *et I isométrie de* $E^{**}$, *alors d'après le théorème 5.5* $I = {}^tf$ *où* $f$ *est une isométrie de* $E^*$.

*Comme f isométrie de* $E^*$ *et E unique prédual de* $E^*$ *alors* ${}^tf \circ i_E(E) = i_E(E)$ *et* $f = {}^tu$ *avec u isométrie de E.*
*ainsi* ${}^t({}^tu) = I$ *et* $I(i_E(E)) = i_E(E)$.

**Lemme 5.6.** *Soit E espace de Banach.*
*Si* $E^*$ *est séparable alors E est séparable.*

**démonstration .** *Si $E^*$ est séparable alors $S = \{\xi \in E^* / \ \|\xi\| = 1\}$ l'est aussi.*

*Soit alors $(\xi_n)_n$ dense dans S.*
$\|\xi_n\| = \sup\limits_{\|x\|=1} | < \xi_n, x > | = 1.$
*ainsi $\forall n$, $\exists x_n$ t.q $\|x_n\| = 1$ et $| < \xi_n, x_n > | \geq \frac{1}{2}$*

*Soit M l'espace vectoriel fermé engendré par les $x_n$.*
*Il s'agit de prouver que $M = E$ pour avoir E séparable.*

*Si $M \neq E \Rightarrow \exists x \in E / \ x \notin M$ fermé.*
*D'après Hahn-Banach, $\exists \xi \in E^* / \ \|\xi\| = 1, < \xi, x >= 1$ et $< \xi, y >= 0$ $\forall y \in M$.*
*ainsi $\forall n$, $< \xi, x_n >= 0$*

$\forall n,\ \frac{1}{2} \leq | < \xi_n, x_n > | \leq \|\xi_n - \xi\|.\|x_n\| + | < \xi, x_n > |$
*donc $\forall n$, $\frac{1}{2} \leq \|\xi_n - \xi\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\xi_n$ dense dans S.*
*impossible.*
*D'où $M = E$ c.q.f.d*

**Remarque .** *Dans le prochain théorème, on admettra qu'un dual séparable a la propriété de Radon-Nicodym.*

**Théorème 5.6.** *Soit E espace de Banach.*
*Si $E^{**}$ séparable alors toute isométrie de $E^{**}$ est la bistransposée d'une isométrie de E.*

**démonstration .** *$E^{**}$ étant un dual séparable alors $E^{**}$ a la propriété de Radon-Nicodym.*
*Comme E s'identifie à un sous-espace de $E^{**}$, alors E a aussi la propriété de Radon-Nicodym.*

*Comme $E^{**}$ est séparable alors d'après le lemme 5.6, $E^*$ l'est aussi donc $E^*$ a la propriété de Radon-Nicodym.*

*D'après le théorème 5.2, E est unique prédual de $E^*$ et $E^*$ est unique prédual*

*de* $E^{**}$*.*
*D'après la proposition 5.2 on a le résultat.*

# Références


[1] G. Godefroy, *Espaces de Banach : Existence et Unicité de certains Préduaux*, Thèse de 3e cycle, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, Tome XXVIII-Fascicule 3, 1978.

[2] G. Godefroy, *Épluchabilité et unicité du prédual*, Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n°2(1977), $exp.n^\circ C11, p.C1 - C3$.

[3] H.P.Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing* $l^1(\mathbb{N}), Proc.Nat.Acad.Sci.USA.Vol.71, No.6, pp.2411 - 2413, June1974$.

[4] E.Odell et H.P.Rosenthal, *A double dual characterization of separable Banach spaces containing* $l^1(\mathbb{N}), IsraelJ.\ of Math, 20(1975), 375 - 384$.