Invertibilité restreinte et Distance au cube

Pierre YOUSSEF
Université Pierre et Marie Curie, Paris VI

1er juin 2010

1 Introduction

Le but de ce travail est de regrouper quelques resultats importants dans la théorie locale des espaces de Banach.
Le point de départ est la décomposition de John qui joue sans doute un rôle crucial. L'inégalité de Grothendieck et le Théorème de domination de Pietsch sont des outils dont on aura besoin.
Une grande portion de ce travail est basée sur un article de R.Vershynin [12], dont le résultat principal permet, étant donné un opérateur linéaire de norme 1, d'extraire une partie de la décomposition de l'identité (c.à.d des points de contacts) qui est équivalente sous l'action de cet opérateur à une base orthonormée de l_2. Ce résultat généralise en un certain sens le principe d'invertibilité de J.Bourgain et L.Tzafriri, et permet d'obtenir un lemme du type Dvoretzky-Rogers.
On parle aussi de la distance au cube qui est un sujet assez difficile et pas entièrement résolu, et on montre que $R_\infty^n \leq cn^{\frac{5}{6}}$ (voir après pour la définition de R_∞^n), cette estimation a été obtenue par A.A.Giannopoulos [6] en se basant sur les travaux de S.Szarek et M.Talagrand [9] .
Finalement, en bien combinant le résultat de R.Vershynin [12] et un théorème de M.Talagrand [11], on obtient des plongements de l_∞^k tout en ayant une information sur la position de la section.

Remerciements : Ce travail a été fait sous la direction de D.Cordero-Erausquin et O.Guédon. Je tiens à les remercier pour tous les conseils et les remarques qui m'ont été très utiles.

2 Décomposition de John

Definition 2.1. On dit qu'un corps convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ est en position de John si $B_2^n \subset K$ et B_2^n est l'ellipsoide de volume maximal contenue dans K.

Remarques.

1. Si K corps convexe $\subset \mathbb{R}^n$, alors $\exists u \in GL_n$ tel que $u(K)$ soit en position de John.
2. Si X est un espace vectoriel normé de dimension n. On a une isométrie d'espaces de Banach entre $(X, \|.\|_X)$ et $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$. On dira que X est en position de John si l'image de B_X la boule unité de X dans $\mathbb{R}^n$ l'est. Ainsi, quitte à changer la structure euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, on peut toujours supposer que X est en position de John.
3. On notera $K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n / \forall x \in K, < x, y > \leq 1\}$ le polaire de K.

Théorème 2.1 (Décomposition de John). *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe symétrique. K est en position de John si et seulement si $B_2^n \subset K$ et il existe $(u_i)_{i=1..n}$ avec $|u_i| = \|u_i\|_K = 1$ tel que :*

$$Id = \sum_i c_i u_i \otimes u_i$$

Démonstration.

$\Rightarrow$) Il s'agit de montrer que $Id = \displaystyle\sum_i c_i u_i \otimes u_i$ avec u_i points de contacts. En d'autres termes que $\frac{1}{n} Id = \displaystyle\sum_i \frac{c_i}{n} u_i \otimes u_i$ avec $\displaystyle\sum_i \frac{c_i}{n} = 1$.

c.à.d que $\frac{1}{n} Id \in T = conv\{u \otimes u / u \textit{ point de contact}\}$ qui est fermé.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $\frac{1}{n} Id \notin T$
Par le théorème de Hahn-banach, $\exists$ φ forme linéaire (sur $M_n(\mathbb{R})$) tel que

$$\varphi(\frac{1}{n} Id) < \varphi(u \otimes u) \quad \forall u \textit{ point de contact.} \tag{1}$$

Soit $H = (h_{jk})$ la matrice $n \times n$ de φ
$H(A) = \displaystyle\sum_{j,k \leq n} h_{jk} a_{jk}$ où $A = (a_{jk})$.
On peut supposer que H est symétrique :
en effet,

$H = H_1 + H_2$ avec H_1 symétrique et H_2 anti-symétrique.
$\forall A$ symétrique, $H_2(A) = \sum_{j,k} h^{(2)}_{jk} a_{jk} = -\sum_{j,k} h^{(2)}_{kj} a_{kj} = 0$
ainsi (1) $\Leftrightarrow H_1(\frac{1}{n}Id) < H_1(u \otimes u)$
On peut supposer que $Tr\ H = 0$
sinon on remplace H par $\tilde{H} = H - Tr(H)I_n$
et comme $I_n(\frac{1}{n}Id) = I_n(u \otimes u) = Tr(\frac{1}{n}Id) = 1$ donc (1) reste la même.
Ainsi $H(\frac{1}{n}Id) = \frac{1}{n}Tr\ H = 0$.
Donc (1) devient $\quad 0 < \sum_{j,k} h_{jk}(u \otimes u)_{jk} \quad \forall$ u point de contact.
Soit $\delta > 0$ et $\Gamma_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n / {}^t x(I_n + \delta H)x \leqslant 1\}$.
Γ_δ est une ellipsoide.
Si u point de contact alors
${}^t uHu = \sum_{j,k} h_{jk}(u \otimes u)_{jk} > 0 \quad$ et $\quad {}^t uu = |u|^2 = 1$.
ainsi ${}^t u(I_n + \delta H)u > 1 \quad$ donc $\quad u \notin \Gamma_\delta \quad \forall \delta > 0$.
Si $y \in \partial K$ et y n'est pas un point de contact alors ${}^t yy > 1$.
$x \to {}^t xHx$ est continue et ∂K compact donc elle est bornée.
Ainsi $\exists\ \delta_0 > 0 / \quad {}^t x(I_n + \delta_0 H)x > 1 \quad \forall x \in \partial K$.
Alors si $x \in \partial K$ on a $x \notin \Gamma_{\delta_0}$ donc $\Gamma_{\delta_0} \subsetneq K$.

Montrons que Γ_{δ_0} a un volume plus grand que celui de B_2^n, pour celà que $det(I_n + \delta_0 H)^{-1} \geq 1$
Si $(\lambda_i)_{i=1..n}$ sont les valeurs propres de $I_n + \delta_0 H$, on a
$\frac{1}{n}\sum_i \lambda_i = \frac{1}{n}Tr(I_n + \delta_0 H) = 1$
Par l'inégalité arithmético-géométrique, $(\prod_i \lambda_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_i \lambda_i = 1$
Donc $det(I_n + \delta_0 H)^{-1} \geq 1$
Contradiction avec le fait que K est en position de John.

$\Leftarrow$) Montrons que B_2^n est l'ellipsoide de volume maximal contenue dans K.
Soit $(e_i)_{i=1..n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $\Gamma = v(B_2^n) = \{x / \sum_{i \leq n} \frac{< x, e_i >^2}{\lambda_i^2} \leq 1\} \subset K$ une ellipsoide.
λ_i etant les valeurs propres de v, il s'agit de montrer que $\prod_i \lambda_i = det\ v \leq 1$.

$\forall j,\ u_j \in K^\circ$ donc $u_j \in \Gamma^\circ = \{x / \sum_i \lambda_i^2 < x, e_i >^2 \leq 1\}$.

ainsi $\forall j,\ \sum_i \lambda_i^2 < u_j, e_i >^2 \leq 1$ alors $\sum_j c_j \sum_i \lambda_i^2 < u_j, e_i >^2 \leq \sum_j c_j = Tr(Id) = n$

D'autre part, $\sum_j c_j < u_j, e_i >^2 = < \sum_j c_j u_j \otimes u_j(e_i), e_i >= |e_i|^2 = 1$

Par l'inégalité arithmético-géométrique, $(\prod_i \lambda_i^2)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i \leq n} \lambda_i^2 \leq 1$.

Ainsi $det(v) \leq 1$, donc K est en position de John.

Remarques.

1. Il existe une version de ce théorème dans le cas non symétrique. L'énoncé serait le suivant :
   Un corps convexe K est en position de John si et seulement si $B_2^n \subset K$ et il existe $(u_i)_i$ avec $|u_i| = \|u_i\|_K = 1$ et des scalaires $(c_i)_i$ tel que :
   $$\sum_i c_i u_i = 0 \ \ et \ \ Id = \sum_i c_i u_i \otimes u_i$$
   .
2. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ corps convexe en position de John alors $B_2^n \subset K \subset \sqrt{n} B_2^n$.
   en effet, si $x \in K,\ |x|^2 = \sum_j c_j < u_j, x >^2$
   or $< u_j, x >^2 \leq 1$ car u_j point de contact, ainsi $|x|^2 \leq \sum_j c_j = n$.
   Ceci permet alors de dire que si $R_2^n = max\{d(X, l_2^n) / X\ Banach\ de\ dimension\ n\}$ où d est la distance de Banach-Mazur, alors $R_2^n \leq \sqrt{n}$.
   Mais comme $d(l_\infty^n, l_2^n) = \sqrt{n}$ alors $R_2^n = \sqrt{n}$.

3 Distance de Banach-Mazur au cube

On note $\mathbb{BM}_n = \{X espace\ de\ Banach\ de\ dimension\ n\}$.
$\mathbb{BM}_n$ est appelé le compact de Banach-Mazur ou le compact de Minkowski. Par la décomposition de John, on a vu que $R_2^n = \sqrt{n}$ ainsi $\mathbb{BM}_n$ est contenu dans la boule (pour la distance de Banach-Mazur) de centre l_2^n et de rayon $\sqrt{n}$.

Une question naturelle est d'estimer le rayon si on change le centre, par exemple pour l_∞^n ou l_1^n.
Par le Théorème de John, on a évidemment que $\sqrt{n} \leq R_\infty^n \leq n$.
Quelques travaux dans cette direction ont permis de répondre partiellement à cette question sans toute fois trouver les estimations optimales :
S.Szarek a montré en considérant des espaces aléatoires que $R_\infty^n \geq c\sqrt{n}log\ n$.
Bourgain-Szarek [3] ont montré que $R_\infty^n = o(n)$. Ce résultat a été amélioré par Szarek-Talagrand [9] qui ont obtenu $R_\infty^n \leq cn^{\frac{7}{8}}$.
on présente ici en détail, un résultat dù à Giannopoulos [6] qui obtient $R_\infty^n \leq cn^{\frac{5}{6}}$ en suivant les mêmes méthodes que dans [9] mais en améliorant une version du lemme de Sauer-Shelah.

On rappelle le lemme de Sauer-Shelah qu'on aura besoin :
Si $D \subset \{-1,1\}^n$ avec $|D| > \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i}$ alors $\exists \sigma \subset \{1,..,n\}$ avec $|\sigma| \geq m$ tel que $P_\sigma D = \{-1,1\}^\sigma$ où P_σ désigne la projection sur les coordonnées de σ.

Lemme 3.1. *Soit $u_1,..,u_s \in \mathbb{R}^n$ avec $|u_i| \leq 1$.*
Pour tout $\varepsilon \in [0,1]$, $\exists \sigma \subset \{1,..,s\}$ avec $|\sigma| \geq (1-\varepsilon)s$ tel que :
$P_\sigma(\Gamma) \supset c\sqrt{\varepsilon}[-1,1]^\sigma$ *où* $\Gamma = \{(\delta_j)_{j\leq s} / \ |\sum_{j\leq s} \delta_j u_j|^2 \leq 2s\}$

Démonstration. On note $S = \{1,..,s\}$, $Q = [-1,1]^s$ et $Q_\sigma = [-1,1]^\sigma$
$\alpha_k = \sum_{i=0}^{k-1} 2^{\frac{i}{2}}$ et $\beta_k = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i$
Soit $D_1 = \{(\varepsilon_j)_{j\leq s} \in \{-1,1\}^s / \ |\sum_{j\leq s} \varepsilon_j u_j|^2 \leq 2s\}$

$$\begin{aligned} 2s|D_1^c| &\leq \int_{D_1^c} |\sum_{j\leq s} \varepsilon_j u_j|^2 d\varepsilon \\ &\leq \int |\sum_{j\leq s} \varepsilon_j u_j|^2 d\varepsilon \\ &= 2^s \sum_{j\leq s} |u_j|^2 \\ &\leq s.2^s \end{aligned}$$

Donc $|D_1^c| \leq 2^{s-1}$ et alors $|D_1| \geq 2^{s-1}$

Ainsi $|D_1| \geq \sum_{i=0}^{l-1} \binom{s}{i}$ avec $l \geq \frac{s}{2}$

Par le lemme de Sauer-Shelah, $\exists \sigma_1 \subset \{1,..,s\}$ avec $|\sigma_1| = l \geq \frac{s}{2}$ tel que $P_{\sigma_1}(D_1) = \{-1,1\}^{\sigma_1}$

Comme $D_1 \subset \Gamma \cap Q$ alors $Q_{\sigma_1} \subset P_{\sigma_1}(\Gamma \cap Q)$

Montrons par récurrence que :

$\exists \sigma_k \subset \{1,..,s\}$ avec $|\sigma_k| \geq (1-\frac{1}{2^k})s$ tel que $P_{\sigma_k}(\alpha_k \Gamma \cap \beta_k Q) \supset Q_{\sigma_k}$

On vient de montrer le cas $k=1$.

Soit $D_{k+1} = \{(\varepsilon_j)_{j \notin \sigma_k} \in 2^{\frac{k}{2}}\{-1,1\}^{s-|\sigma_k|} / \ |\sum_{j \notin \sigma_k} \varepsilon_j u_j|^2 \leq 2s\}$

On peut identifier D_{k+1} avec $O_{\sigma_k} \times D_{k+1}$. Ainsi un élément de D_{k+1} s'écrit $(\varepsilon_j)_{j \leq s}$ avec

$\varepsilon_j = 0$ si $j \in \sigma_k$ et $\varepsilon_j \in \{-2^{\frac{k}{2}}, 2^{\frac{k}{2}}\}$ si $j \notin \sigma_k$ et $|\sum_{j \leq s} \varepsilon_j u_j|^2 \leq 2s$

$$\begin{aligned}
2s|D_{k+1}^c| &\leq \int_{D_{k+1}^c} |\sum_{j \notin \sigma_k} \varepsilon_j u_j|^2 d\varepsilon \\
&\leq \int |\sum_{j \notin \sigma_k} \varepsilon_j u_j|^2 d\varepsilon \\
&= 2^{s-|\sigma_k|}.2^k. \sum_{j \notin \sigma_k} |u_j|^2 \\
&\leq 2^{s-|\sigma_k|}.2^k.|\sigma_k^c|
\end{aligned}$$

Or $|\sigma_k| \geq (1-\frac{1}{2^k})s$ donc $|\sigma_k^c| \leq \frac{1}{2^k}s$

Ainsi $2s|D_{k+1}^c| \leq 2^{s-|\sigma_k|}.s$

D'où $|D_{k+1}^c| \leq 2^{s-|\sigma_k|-1}$ et $|D_{k+1}| \geq 2^{s-|\sigma_k|-1}$

Donc $|D_{k+1}| \geq \sum_{i=0}^{l-1} \binom{s-|\sigma_k|}{i}$ avec $l \geq \frac{1}{2}(s-|\sigma_k|)$

Par le lemme de Sauer-Shelah, $\exists \sigma_{k+1}^* \subset S \setminus \sigma_k$ avec $|\sigma_{k+1}^*| \geq \frac{1}{2}(s-|\sigma_k|)$ tel que $P_{\sigma_{k+1}^*}(D_{k+1}) = \{-2^{\frac{k}{2}}, 2^{\frac{k}{2}}\}^{\sigma_{k+1}^*}$

ou encore après identification que $P_{\sigma_k \cup \sigma_{k+1}^*}(D_{k+1}) = O_{\sigma_k} \times \{-2^{\frac{k}{2}}, 2^{\frac{k}{2}}\}^{\sigma_{k+1}^*}$

Comme $D_{k+1} \subset \Gamma \cap 2^{\frac{k}{2}}Q$ alors $O_{\sigma_k} \times 2^k Q_{\sigma_{k+1}^*} \subset P_{\sigma_k \cup \sigma_{k+1}^*}(2^{\frac{k}{2}}\Gamma \cap 2^k Q)$

On pose $\sigma_{k+1} = \sigma_k \cup \sigma_{k+1}^*$

$$\begin{aligned}|\sigma_{k+1}| &= |\sigma_k| + |\sigma_{k+1}^*| \\ &\geq |\sigma_k| + \frac{1}{2}(s - |\sigma_k|) \\ &\geq \frac{s}{2} + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^k})s \\ &= (1 - \frac{1}{2^{k+1}})s\end{aligned}$$

Reste à vérifier que $P_{\sigma_{k+1}}(\alpha_{k+1}\Gamma \cap \beta_{k+1}Q) \supset Q_{\sigma_{k+1}}$
Soit $a \in Q_{\sigma_k}$ et $b \in Q_{\sigma_{k+1}^*}$; $(a,b) \in Q_{\sigma_{k+1}}$
Par l'hypothèse de récurrence, on a que $a \in P_{\sigma_k}(\alpha_k\Gamma \cap \beta_k Q)$
Ainsi $\exists z_a \in \beta_k Q_{\sigma_{k+1}^*}$ tel que $(a, z_a) \in P_{\sigma_{k+1}}(\alpha_k\Gamma \cap \beta_k Q)$
$b - z_a \in (\beta_k + 1)Q_{\sigma_{k+1}^*}$ or $\beta_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = \frac{2^k - 1}{2 - 1}$ donc $\beta_k + 1 = 2^k$
alors $b - z_a \in 2^k Q_{\sigma_{k+1}^*}$ parsuite $(0, b - z_a) \in P_{\sigma_k \cup \sigma_{k+1}^*}(2^{\frac{k}{2}}\Gamma \cap 2^k Q)$
Ainsi $(a,b) = (0, b - z_a) + (a, z_a) \in P_{\sigma_{k+1}}(\alpha_{k+1}\Gamma \cap \beta_{k+1}Q)$

On a donc :
$\forall k$, $\exists \sigma_k \subset S$ avec $|\sigma_k| \geq (1 - \frac{1}{2^k})s$ tel que :
$[-1,1]^{\sigma_k} \subset P_{\sigma_k}(\alpha_k\Gamma \cap \beta_k Q) \subset P_{\sigma_k}(\alpha_k\Gamma) \subset P_{\sigma_k}(\frac{2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{2}-1}\Gamma)$ car $\alpha_k = \frac{2^{\frac{k}{2}} - 1}{\sqrt{2}-1}$ et si $x \in \Gamma$ et $|\alpha| \leq 1$ alors $\alpha x \in \Gamma$
ou aussi que $(\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{1}{2^k}}[-1,1]^{\sigma_k} \subset P_{\sigma_k}(\Gamma)$

Si $\varepsilon \in [0,1]$, $\exists k$ tel que $\frac{1}{2^k} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2^{k-1}}$
$\exists \sigma = \sigma_k$ avec $|\sigma| \geq (1 - \frac{1}{2^k})s \geq (1 - \varepsilon)s$ tel que
$P_\sigma(\Gamma) \supset (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{1}{2^k}}[-1,1]^\sigma \supset \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon}[-1,1]^\sigma$

Ainsi $\forall \varepsilon \in [0,1]$, $\exists \sigma \subset \{1,..,s\}$ avec $|\sigma| \geq (1 - \varepsilon)s$ tel que
$P_\sigma(\Gamma) \supset c\sqrt{\varepsilon}[-1,1]^\sigma$

Remarques.
La dépendance en ε dans le lemme 3.1 est optimale.
En effet, considérons l'exemple suivant :
Soit $n = s + 1$ et $u_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + e_n)$ $\forall i \leq s$ où $(e_i)_{i \leq n}$ est la base canonique

de $\mathbb{R}^n$
$|\sum_{j\le s}\delta_j u_j|^2 = \frac{1}{2}(\sum_{j\le s}\delta_j^2 + (\sum_{j\le s}\delta_j)^2)$
D'où si $(\delta_j)_{j\le s} \in \Gamma$ alors $\sum_{j\le s}\delta_j^2 \le 4s$ et $|\sum_{j\le s}\delta_j| \le 2\sqrt{s}$

Soit $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2}]$ fixé. (on s'interesse à ε petit).
Soit $\sigma \subset \{1, .., s\}$ avec $|\sigma| = m \ge (1-\varepsilon)s$. On prend $\varepsilon s \ge 1$ sinon c'est trivial.
Si $(t, .., t) \in P_\sigma(\Gamma)$ alors $\exists (\delta_j)_{j\notin\sigma}$ tel que
$mt^2 + \sum_{j\notin\sigma}\delta_j^2 \le 4s$ et $|mt + \sum_{j\notin\sigma}\delta_j| \le 2\sqrt{s}$
Par Cauchy-Schwartz on a $|\sum_{j\notin\sigma}\delta_j| \le (\sum_{j\notin\sigma}\delta_j^2)^{\frac{1}{2}}.|\sigma^c|^{\frac{1}{2}}$
Ainsi

$$\begin{aligned}
|mt| &\le 2\sqrt{s} + |\sum_{j\notin\sigma}\delta_j| \\
&\le 2\sqrt{s} + (\sum_{j\notin\sigma}\delta_j^2)^{\frac{1}{2}}.|\sigma^c|^{\frac{1}{2}} \\
&\le 2\sqrt{s} + \sqrt{4s - mt^2}.\sqrt{\varepsilon s} \\
&\le 2\sqrt{s} + 2\sqrt{\varepsilon}s
\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{2}s|t| \le |mt| \le 2\sqrt{s} + 2\sqrt{\varepsilon}s$
Alors $|t| \le \frac{4}{\sqrt{s}} + 4\sqrt{\varepsilon}$
D'où $|t| \le 8\sqrt{\varepsilon}$

Lemme 3.2. *Soit X un espace vectoriel normé de dimension n en position de John.*
Soit Z un sous-espace de X de dimension k.
Alors pour tout $l \le k$, il existe un système orthonormal $(z_j)_{j\le l}$ dans Z tel que $\|z_j\|_X \ge \sqrt{\frac{k-j+1}{n}} \ge \sqrt{\frac{k-l+1}{n}} \quad \forall j \le l$.

Démonstration. Montrons qu'il existe $z \in Z$ tel que $\|z\|_X \ge \sqrt{\frac{k}{n}}$.

Il s'agit donc de trouver $x^* \in B(X^*)$ tel que $\|Px^*\|_{X^*} \ge \sqrt{\frac{k}{n}}$ où P est la projection orthogonale sur Z.
car si $\|Px^*\|_{X^*} \ge \sqrt{\frac{k}{n}}$ alors $\exists z \in Z$ tel que $< x^*, z > \ge \sqrt{\frac{k}{n}}$

ainsi $\|z\|_X \geq \sqrt{\frac{k}{n}}$.

Soit $Id_{X^*} = \sum_j \lambda_j x_j^* \otimes x_j^*$ décomposition de John dans X^*.

En particulier $\sum_j \lambda_j = n$.

$P^* = P$ et $P \circ P = P$. Donc $P = P^*P = \sum_j \lambda_j P x_j^* \otimes P x_j^*$.

Ainsi $k = dim\ Z = Trace(P) = \sum_j \lambda_j \|P x_j^*\|_2^2$.

Si $\forall j$, $\|P x_j^*\|_2^2 < \sqrt{\frac{k}{n}}$ alors $\sum_j \lambda_j \|P x_j^*\|_2^2 < k$ impossible.

Ainsi $\exists j$ tel que $\|P x_j^*\|_2 \geq \sqrt{\frac{k}{n}}$. Donc $\|P x_j^*\|_{X^*} \geq \sqrt{\frac{k}{n}}$ car $B(X^*) \subset B_2^n$.

On a donc trouvé $z_1 \in Z$ tel que $\|z_1\|_X \geq \sqrt{\frac{k}{n}}$.
On remplace Z par $Z_1 = Z \ominus vect(z_1)$; $dim\ Z_1 = k - 1$.
Par le même procédé, on montre l'existence des $(z_j)_j$.

Lemme 3.3. *Soit X un espace vectoriel normé de dimension n tel que B_2^n soit l'ellipsoide de volume minimal contenant B_X (c.à.d X^* est en position de John).*
Pour tout $\varepsilon \in [0,1]$, $\exists x_1, ..x_s$ des points de contacts avec $s \geq (1-\varepsilon)n$ tel que $d(x_j, vect(x_i)_{i \neq j}) \geq \sqrt{\varepsilon} \quad \forall j = 1, ..s$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in [0,1]$
Soit s le plus petit entier $\geq (1-\varepsilon)n$, et $x_1, ..x_s$ des points de contacts tel que $A = conv\{\pm x_i;\ i \leq s\}$ a un volume maximal parmi tous les ensembles de cette forme.
On pose $F_j = vect(x_i)_{i \neq j}$
$d(x_j, F_j) = \max\limits_{x \in B_X} d(x, F_j)$ car sinon $\exists x \in B_X$ un point de contact tel que $d(x, F_j) > d(x_j, F_j)$. En remplaçant x_j par x dans A, on obtient un ensemble de volume plus grand ce qui contradit le fait que A est de volume maximal.
Ainsi on a en plus que les x_j sont linéairement indépendants, donc que $dim\ F_j = s - 1$

Par le lemme 3.2,
$\forall j = 1, ..s$ $\exists y_j$ un point de contact tel que $|P_{F_j^\perp} y_j| \geq \sqrt{\frac{n-(s-1)}{n}}$

Ainsi $d(x_j, F_j) = \max_{x \in B_X} d(x, F_j) = \max_{x \in B_X} |P_{F_j^\perp} x| \geq |P_{F_j^\perp} y_j| \geq \sqrt{\frac{n-s+1}{n}}$
or $s - 1 \leq (1-\varepsilon)n$ ainsi $\frac{n-s+1}{n} \geq \varepsilon$
D'où $d(x_j, F_j) \geq \sqrt{\varepsilon}$

Proposition 3.1. *Soit X un espace vectoriel normé de dimension n tel que B_2^n soit l'ellipsoide de volume minimal contenant B_X.*
Alors pour tout $\varepsilon \in [0,1]$, $\exists z_1, .., z_m$ des points de contacts avec $m \geq (1-\varepsilon)n$ tel que :

$$|\sum_{j \leq m} a_j z_j| \geq c \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \sum_{j \leq m} |a_j| \qquad \textit{pour toute suite de scalaires } (a_j)_{j \leq m}$$

Démonstration. On applique le lemme 3.3 avec $\frac{\varepsilon}{2}$, on a :
$\exists x_1, .., x_s$ avec $s \geq (1 - \frac{\varepsilon}{2})n$ tel que $d(x_i, vect(x_j)_{j \neq i}) \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$

On pose $u_i' = x_i - P_{[x_j]_{j \neq i}} x_i$
$< u_i', x_j >= 0 \quad \forall j \neq i$
$< u_i', x_i >= |x_i|^2 - |P_{[x_j]_{j \neq i}} x_i|^2 = d(x_i, vect(x_j)_{j \neq i})^2 \geq \frac{\varepsilon}{2}$
$|u_i'|^2 =< u_i', u_i' >= |x_i|^2 - |P_{[x_j]_{j \neq i}} x_i|^2 =< u_i', x_i >$

Soit $u_i = \frac{u_i'}{|u_i'|^2}$
On a donc $< u_i, x_j >= \delta_{ij}$ et $|u_i| \leq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$

On applique le lemme 3.1 à $(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} u_i)_{i \leq s}$
ainsi $\exists \sigma \subset \{1, .., s\}$ avec $|\sigma| \geq (1 - \frac{\varepsilon}{2})s \geq (1-\varepsilon)n$ tel que $P_\sigma(\Gamma) \supset c\sqrt{\varepsilon}[-1,1]^\sigma$
On prend pour z_j les x_j avec $j \in \sigma$

Soit $(a_j)_{j \in \sigma}$ des scalaires.
On écrit $a_j = b_j + ic_j$
Soit $(\theta_j)_{j \in \sigma}$ et $(\theta_j')_{j \in \sigma}$ les signes respectifs de $(b_j)_{j \in \sigma}$ et $(c_j)_{j \in \sigma}$.
Soit $(\delta_j)_{j \leq s}$ et $(\delta_j')_{j \leq s}$ les extensions respectives de $(c\sqrt{\varepsilon}\theta_j)_{j \in \sigma}$ et $(c\sqrt{\varepsilon}\theta_j')_{j \in \sigma}$

dans Γ.

$$
\begin{aligned}
|<\sum_{j\in\sigma} a_j x_j, \sum_{j\leq s}(\delta_j - i\delta'_j)\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}u_j>| &\leq |\sum_{j\in\sigma} a_j x_j|.|\sum_{j\leq s}(\delta_j - i\delta'_j)\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}u_j| \\
&\leq 2|\sum_{j\in\sigma} a_j x_j|.\sqrt{2s} \qquad \textit{car } \delta_j \textit{ et } \delta'_j \in \Gamma \\
&\leq 2\sqrt{2}\sqrt{n}|\sum_{j\in\sigma} a_j x_j|
\end{aligned}
$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
|<\sum_{j\in\sigma} a_j x_j, \sum_{j\leq s}(\delta_j - i\delta'_j)\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}u_j>| &\geq |\sum_{j\in\sigma}[c\sqrt{\varepsilon}(|b_j|+|c_j|) + i(c\sqrt{\varepsilon}\theta_j c_j - c\sqrt{\varepsilon}\theta'_j b_j)]\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} < x_j, u_j > | \\
&\geq c\varepsilon\sum_{j\in\sigma}(|b_j|+|c_j|) \\
&\geq c\varepsilon\sum_{j\in\sigma}|a_j|
\end{aligned}
$$

Ainsi $\frac{c\varepsilon}{\sqrt{n}}\sum_{j\in\sigma}|a_j| \leq |\sum_{j\in\sigma} a_j x_j|$

Théorème 3.1. *Pour tout espace de Banach X de dimension n, on a* $d(X, l_1^n) \leq cn^{\frac{5}{6}}$. *Ainsi* $R_\infty^n \leq cn^{\frac{5}{6}}$.

Démonstration. Soit X un espace vectoriel normé de dimension n.
On peut supposer que X^* est en position de John. Sinon par une isométrie (d'espaces de Banach) on est ramené à ce cas.
En effet, $\exists S : X^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que SX^* soit en position de John. On définit alors $\|y\|_{\mathbb{R}^n} := \|S^{-1}y\|_{X^*}$

Soit $\varepsilon \in [0,1]$ qui sera fixé plutard.
Soient $x_1, .., x_k$ des points de contacts provenant de la proposition 3.1.
$(k \geq (1-\varepsilon)n)$
Soient $y_1, .., y_{n-k}$ base orthogonale de $[x_1, .., x_k]^\perp$.
On normalise les y_i de façon à avoir $\|y_i\| \leq 1$. Il suffit de prendre $|y_i| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ car par le Théorème de John on a $\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n \subset B_X \subset B_2^n$.

Pour tout scalaires $(t_j)_{j\leq k}$ et $(s_i)_{i\leq n-k}$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\leq k}|t_j|+\sum_{i\leq n-k}|s_i| &\geq \|\sum_{j\leq k}t_jx_j+\sum_{i\leq n-k}s_iy_i\| \qquad \textit{car } \|x_j\|\leq 1 \textit{ et } \|y_i\|\leq 1\\
&\geq |\sum_{j\leq k}t_jx_j+\sum_{i\leq n-k}s_iy_i| \qquad \textit{car } B_X\subset B_2^n\\
&= (|\sum_{j\leq k}t_jx_j|^2+|\sum_{i\leq n-k}s_iy_i|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \textit{par orthogonalité}\\
&= (|\sum_{j\leq k}t_jx_j|^2+\frac{1}{n}\sum_{i\leq n-k}|s_i|^2)^{\frac{1}{2}}\\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}}(|\sum_{j\leq k}t_jx_j|+\frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{i\leq n-k}|s_i|^2)^{\frac{1}{2}})\\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}}(|\sum_{j\leq k}t_jx_j|+\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{n-k})^{\frac{1}{2}}\sum_{i\leq n-k}|s_i|) \qquad \textit{par Cauchy}-\textit{Schwartz}\\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}}(c\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\sum_{j\leq k}|t_j|+\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{n-k})^{\frac{1}{2}}\sum_{i\leq n-k}|s_i|) \qquad \textit{par la proposition } 3.1\\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}}(c\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\sum_{j\leq k}|t_j|+\frac{1}{n\sqrt{\varepsilon}}\sum_{i\leq n-k}|s_i|) \qquad \textit{car } n-k\leq \varepsilon n
\end{aligned}$$

pour $\frac{c\varepsilon}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n\sqrt{\varepsilon}}$ c.à.d $\varepsilon=c'n^{-\frac{1}{3}}$
On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j\leq k}|t_j|+\sum_{i\leq n-k}|s_i| &\geq \|\sum_{j\leq k}t_jx_j+\sum_{i\leq n-k}s_iy_i\|\\
&\geq c'n^{-\frac{5}{6}}(\sum_{j\leq k}|t_j|+\sum_{i\leq n-k}|s_i|)
\end{aligned}$$

On considère $T:X\longrightarrow l_1^n$ défini par :
$Tx_i=e_i$ pour $1\leq i\leq k$ et $Ty_i=e_{i+k}$ pour $1\leq i\leq n-k$
T isomorphisme et $\|T\|\leq cn^{\frac{5}{6}}$ et $\|T^{-1}\|\leq 1$
D'où $d(X,l_1^n)\leq cn^{\frac{5}{6}}$

4 Inégalités de Grothendieck et Théorème de Domination de Pietsch

Théorème 4.1 (Inégalité de Grothendieck). *Soit H un espace de Hilbert de dimension n et $A = (a_{ij})_{i,j\leq n}$ matrice $n \times n$ et soit $x_1, .., x_n, y_1, ..y_n \in H$ de norme ≤ 1. On a alors :*
$|\sum_{i,j} a_{ij} < x_i, y_j > | \leq K_G max\{|\sum_{i,j} a_{ij} s_i t_j|/ \ |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1\}.$
où K_G est une constante universelle appelée constante de Grothendieck.

Démonstration.
On note $\|a\| = max\{|\sum_{i,j} a_{ij} s_i t_j|/ \ |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1\}$
et $N(a) = sup\{|\sum_{i,j} a_{ij} < z_i, w_j > |/ \ z_1, ..z_n, w_1, .., w_n \in H$ de norme $\leq 1\}$.
On va d'abord construire un plongement de H dans $L_2([0, 1])$.
Soit $(e_k)_k$ base orthonormée de H.
Si $x \in H, \ x = \sum_k < x, e_k > e_k$; on note $\xi_k =< x, e_k >$.
On définit $X : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $X(t) = \sum_k \xi_k r_k(t)$ où les r_k sont des variables de Rademacher.
$\|X\|_2^2 = \int_0^1 X(t)^2 dt = \sum_k \xi_k^2 = \|x\|^2$.
Si $y = \sum_k \eta_k e_k$ alors $< X, Y >= \int_0^1 X(t)Y(t)dt = \sum_k \xi_k \eta_k =< x, y >$.
ainsi $\varphi : H \longrightarrow L^2([0, 1])$ qui à x associe X est un plongement.(C'est une isométrie sur son image)
On va alors travailler avec X au lieu de x et bénéficier de l'inégalité de khintchine.
Soit $M > 0$, pour $x \in H$, on pose :

$$X^L(t) = \begin{cases} X(t) & si |X(t)| \leq M \\ signe(X(t)).M & sinon \end{cases}$$

et $X^U(t) = X(t) - X^L(t)$.
$|X^L(t)| \leq |X(t)|$ et $|X^L(t)| \leq M$ ainsi $\|X^L\|_2 \leq \|X\|_2 \leq 1$.
Si $|X(t)| \leq M$ alors $X^U(t) = 0$.
Si $|X(t)| > M$, alors $X^U(t) = X(t) - signe(X(t)).M$.

donc $signe(X^U(t)) = signe(X(t))$ et $|X^U(t)| = |X(t)| - M$.
Pour $m, s > 0$, $ms \leq m^2 + \frac{s^2}{4}$ c.à.d $s \leq m + \frac{s^2}{4m}$.
Ainsi $|X(t)| \leq M + \frac{X(t)^2}{4M}$ et $|X^U(t)| \leq \frac{X(t)^2}{4M}$.
Donc $\|X^U\|_2^2 \leq \frac{1}{16M^2}\|X\|_4^4 \leq \frac{(\sqrt{3})^4}{16M^2}\|X\|_2^2$ par khintchine.
Parsuite $\|X^U\|_2 \leq \frac{3}{4M}$.
Si $x_1, .., x_n, y_1, ..y_n \in H$ de norme ≤ 1, on a :

$$\begin{aligned}
|\sum_{i,j} a_{ij} < x_i, y_j > | &= |\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i(t) Y_j(t) dt| \\
&\leq |\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i^L(t) Y_j^L(t) dt| + |\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i^U(t) Y_j^L(t) dt| \\
&\quad + |\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i(t) Y_j^U(t) dt| \\
&\leq M^2 |\sum_{i,j} a_{ij}| + \frac{3}{4M} |\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} \frac{X_i^U(t)}{\|X_i^U(t)\|_2} Y_j^L(t) dt| \\
&\quad + \frac{3}{4M} |\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i(t) \frac{Y_j^U(t)}{\|Y_j^U\|_2} dt| \\
&\leq M^2 \|a\| + \frac{3}{2M} N(a)
\end{aligned}$$

D'où $N(a) \leq M^2\|a\| + \frac{3}{2M}N(a)$.
pour $M > \frac{3}{2}, N(a) \leq \frac{2M^3}{2M-3}\|a\|$.
et pour $M = \frac{9}{4}$ on a $N(a) \leq \frac{243}{16}\|a\|$.

Remarques.
Le membre de droite dans l'inégalité de Grothendieck représente $\|A\|_{l_\infty^n \to l_1^n}$.
G.Pisier a montré que $K_G \leq (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}$.

Definition 4.1. Soit X,Y des espaces de Banach. Soit$1 \leq p < \infty$.
On dit que $u : X \longrightarrow Y$ linéaire est p-sommante si pour toute suite $x_1, .., x_n$ dans X on a :
$(\sum_{i=1}^n \|ux_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq Csup\{(\sum_{i \leq n} |x^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{p}} / \ x^* \in B(X^*)\}$.
La meilleure constante C est $\pi_p(u)$.(C'est une norme sur l'espace des applications p-sommantes pour laquelle ce dernier est un Banach)

Remarques. u est p-sommante si et seulement si u envoie toute suite faiblement p-sommante en une suite fortement p-sommante.

Théorème 4.2 (**Théorème de domination de Pietsch**). *Soit X, Y deux espaces de Banach. Soit $u : X \longrightarrow Y$ opérateur linéaire et K ensemble pré-faiblement compact de $B(X^*)$. Alors u est p-sommante si et seulement si $\exists \mu$ probabilité sur K et une constante C tel que :*
$\forall x \in X, \|ux\| \leq C(\int_K < x^*, x >^p \, d\mu(x^*))^{\frac{1}{p}}$.
La meilleure constante C est $\pi_p(u)$.

Démonstration.
$\Leftarrow$) Soit $x_1, .., x_n \in X$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \|ux_i\|^p &\leq C^p \sum_{i=1}^{n} \int_K |< x^*, x_i >|^p d\mu(x^*) \\ &\leq C^p sup\{\sum_{i=1}^{n} |< x^*, x_i >|^p / \ x^* \in B(X^*)\}\end{aligned}$$

Donc u est p-sommante.

$\Rightarrow$) On identifie $C(K)^*$ avec M(K) l'espace des mesures boréliennes sur K.
Pour $M \subset X$ fini, on définit $g_M : K \longrightarrow \mathbb{R}$ par :
$g_M(x^*) = \sum_{x \in M} (\|ux\|^p - \pi_p(u)^p |< x^*, x >|^p)$.
On note Q l'ensemble des applications de la forme g_M.
Q est convexe : en effet,
Si g_M et $g_{M'}$ sont dans Q et $\lambda \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned}(\lambda g_M + (1-\lambda) g_{M'})(x^*) &= \sum_{x \in M} (\|u(\lambda^{\frac{1}{p}} x)\|^p - \pi_p(u)^p |< x^*, \lambda^{\frac{1}{p}} x >|^p) \\ &\quad + \sum_{x \in M'} (\|u((1-\lambda)^{\frac{1}{p}} x)\|^p - \pi_p(u)^p |< x^*, (1-\lambda)^{\frac{1}{p}} x >|^p) \\ &= g_{M''}(x^*) \qquad \text{où } M'' = \lambda^{\frac{1}{p}} M \cup (1-\lambda)^{\frac{1}{p}} M'.\end{aligned}$$

On note $P = \{f \in C(K, \mathbb{R}) / \ f(x^*) > 0 \ \forall x^* \in K\}$.
P est un ouvert convexe.
Comme u est p-sommante alors $\exists x^* \in K$ tel que $g_M(x^*) \leq 0$, ainsi P

et Q sont disjoints.
Par le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique), $\exists \mu \in C(K)^* \equiv M(K)$ tel que :
$< \mu, g > \leq c < < \mu, f >$ pour tout $g \in Q$ et $f \in P$.
Comme $0 \in Q$ alors $c \geq 0$.
Si $c > 0$, comme P contient les constantes > 0 on aurait $c < c$. Donc $c = 0$.

$$< \mu, g > \leq 0 < < \mu, f > \qquad \textit{pour tout } g \in Q \textit{ et } f \in P. \tag{2}$$

On peut supposer que μ est une probabilité, ceci ne change pas (2).
On a $\int_K g d\mu \leq 0$ pour tout $g \in Q$.
Soit $x \in X$, on pose $M = \{x\}$. On a alors :
$\int_K (\|ux\|^p - \pi_p(u)^p| < x^*, x > |^p) d\mu(x^*) \leq 0$.
Comme μ est une probabilité alors $\|ux\| \leq \pi_p(u)(\int_K | < x^*, x > |^p d\mu(x^*))^{\frac{1}{p}}$.

Proposition 4.1. *Soit $1 \leq p \leq 2$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $u : l_\infty^n \longrightarrow l_p^n$ linéaire. On a alors $\pi_2(u) \leq K_G \|u\|$.*

Démonstration. Soit $x_1, .., x_m$ dans l_∞^n. (On peut supposer que $m = n$). Il s'agit de montrer que :
$$(\sum_{k=1}^n \|ux_k\|_{l_p^n}^2)^{\frac{1}{2}} \leq K_G \|u\| sup\{(\sum_{k=1}^n |y, x_k|^2)^{\frac{1}{2}} / \ \|y\|_{l_1^n} \leq 1\}.$$
Par homogénéité, on peut supposer que $A := sup\{(\sum_{k=1}^n |y, x_k|^2)^{\frac{1}{2}} / \ \|y\|_{l_1^n} \leq 1\} = 1$.
On note $(u_{ij})_{i,j \leq n}$ la matrice de u. Ainsi $ue_j = \sum_{i=1}^n u_{ij} e_i$.
Soit $(y_i)_{i \leq n} \in B_{l_q^n}$. ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)
Appliquons l'inégalité de Grothendieck (4.1) à $(u_{ij} y_i)_{i,j \leq n}$:
pour $w_i, z_j \in B_{l_2^n}$ on a
$$|\sum_{i,j \leq n} u_{ij} y_i < w_i, z_j > | \leq K_G max\{| \sum_{i,j \leq n} u_{ij} y_i s_i t_j | / \ |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1\}.$$
or si $t = (t_j)_{j \leq n}$ et $y_s = \sum_{i \leq n} y_i s_i e_i \in B_{l_q^n}$ on a :
$$|\sum_{i,j \leq n} u_{ij} y_i s_i t_j | =< u(t), y_s >\leq \|u(t)\|_{l_p} \leq \|u\|.$$

D'où $|\sum_{i,j\leq n} u_{ij} y_i < w_i, z_j > | \leq K_G \|u\|$.
Soit $z_j = (x_{kj})_{k=1..n}$ les $j^{\text{ème}}$ coordonnées des x_k.
$z_j \in B_2^n$ car $(\sum_k |x_{kj}|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_k |< x_k, e_j >|^2)^{\frac{1}{2}} \leq A = 1$.
Soit $w_i \in B_2^n$ tel que $< \sum_{j\leq n} u_{ij} y_i z_j, w_i >= \| \sum_{j\leq n} u_{ij} y_i z_j \|_2$.
Ainsi $\sum_{i\leq n} \| \sum_{j\leq n} u_{ij} y_i z_j \|_2 \leq K_G \|u\|$ c.à.d $\sum_{i\leq n} (\sum_{k\leq n} | \sum_{j\leq n} u_{ij} y_i x_{kj}|^2)^{\frac{1}{2}} \leq K_G \|u\|$
ou encore $\sum_{i\leq n} |y_i| (\sum_{k\leq n} | \sum_{j\leq n} u_{ij} x_{kj}|^2)^{\frac{1}{2}} \leq K_G \|u\|$ et ceci pour tout $y \in B_{l_q^n}$.
Donc $\|(\sum_{k\leq n} | \sum_{j\leq n} u_{ij} x_{kj}|^2)^{\frac{1}{2}}_{i=1..n} \|_{l_p^n} \leq K_G \|u\|$.
c.à.d $(\sum_{i\leq n} (\sum_{k\leq n} | \sum_{j\leq n} u_{ij} x_{kj}|^2)^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}} \leq K_G \|u\|$.

$$\begin{aligned}
(\sum_{k\leq n} \|ux_k\|_{l_p^n}^2)^{\frac{1}{2}} &= (\sum_{k\leq n} (\sum_{i\leq n} | \sum_{j\leq n} u_{ij} x_{kj}|^p)^{\frac{2}{p}})^{\frac{1}{2}} \\
&= \|(\sum_{i\leq n} | \sum_{j\leq n} u_{ij} x_{kj}|^p)_{k=1..n} \|_{l_{\frac{2}{p}}}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\sum_{i\leq n} \|(| \sum_{j\leq n} u_{ij} x_{kj}|^p)_{k=1..n} \|_{l_{\frac{2}{p}}})^{\frac{1}{p}} \\
&= (\sum_{i\leq n} (\sum_{k\leq n} | \sum_{j\leq n} u_{ij} x_{kj}|^2)^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K_G \|u\|
\end{aligned}$$

Proposition 4.2. *Soit $u : l_2^n \longrightarrow l_1^m$ linéaire. Alors $\exists\ \tau \subset \{1,..,m\}$ avec $|\tau| \geq \frac{m}{2}$ tel que $\|P_\tau u\|_{2\to 2} \leq (\frac{\pi}{m})^{\frac{1}{2}} \|u\|_{2\to 1}$.*
P_τ désigne la projection sur les coordonnées de τ.

Démonstration. $u^* : l_\infty^m \longrightarrow l_2^n$
Par la proposition 4.1, on a $\pi_2(u^*) \leq K_G \|u^*\|_{l_\infty^n \to l_2^n}$.
On sait que $K_G \leq (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}$.
Par le théorème de domination de Pietsch (Théorème 4.2), $\exists\ (\lambda_i)_{i\leq m}$ avec $\lambda_i > 0$ et $\sum_i \lambda_i = 1$ tel que :

$$\forall x \in l_\infty^m,\ \ |u^*(x)| \leq\ \pi_2(u^*)(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^2)^{\frac{1}{2}} \leq\ (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}\|u^*\|_{l_\infty^m \to l_2^n}(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $\tau = \{i \leq m/\ \lambda_i \leq \frac{2}{m}\}$.

Si $|\tau| < \frac{m}{2}$ alors $|\tau^c| > \frac{m}{2}$ et $\displaystyle\sum_{i \leq m} \lambda_i \geq \sum_{i \in \tau^c} \lambda_i > \frac{2}{m}|\tau^c| > 1$ absurde.

D'où $|\tau| \geq \frac{m}{2}$.

$|u^*(P_\tau^t x)| \leq (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}\|u^*\|_{\infty \to 2}(\frac{2}{m})^{\frac{1}{2}}(\displaystyle\sum_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

Ainsi $\|u^* P_\tau^t\|_{2 \to 2} \leq (\frac{\pi}{m})^{\frac{1}{2}}\|u^*\|_{\infty \to 2}$ et par dualité on a $\|P_\tau u\|_{2 \to 2} \leq (\frac{\pi}{m})^{\frac{1}{2}}\|u\|_{2 \to 1}$.

Remarques.

On peut améliorer ce résultat. En effet, si $u : l_2^n \longrightarrow l_1^m$ et $\varepsilon \in [0,1]$.
Alors $\exists \tau \subset \{1,..,m\}$ avec $|\tau| \geq (1-\varepsilon)m$ tel que $\|P_\tau u\|_{2 \to 2} \leq (\frac{\pi}{2\varepsilon m})^{\frac{1}{2}}\|u\|_{2 \to 1}$
Pour celà il suffit de prendre $\tau = \{i \leq m/\ \lambda_i \leq \frac{1}{\varepsilon m}\}$ et continuer la preuve comme précédemment.

5 Suites hilbertiennes et Besseliennes. Principe d'invertibilité de Bourgain-Tzafriri.

Definition 5.1.

1. Soit X et Y deux espaces de Banach.
   Soit $(x_j)_j$ suite dans X et $(y_j)_j$ suite dans Y.
   On dit que $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ sont K-equivalentes s'il existe K_1, K_2 avec $K_1K_2 \leq K$ tel que pour toute suite finie de scalaires $(a_j)_j$ on a :
   $\frac{1}{K_1}\|\displaystyle\sum_j a_j y_j\|_Y \leq \|\sum_j a_j x_j\|_X \leq K_2\|\sum_j a_j y_j\|_Y$.
2. On dit que $(x_j)_j$ est K-Hilbertienne si pour toute suite finie de scalaires $(a_j)_j$ on a $\|\displaystyle\sum_j a_j x_j\| \leq K(\sum_j |a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$.
3. On dit que $(x_j)_j$ est K-Besselienne si pour toute suite finie de scalaires $(a_j)_j$ on a $\frac{1}{K}(\displaystyle\sum_j |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|\sum_j a_j x_j\|$.

Lemme 5.1. *Soit* $Id = \displaystyle\sum_j x_j \otimes x_j$ *décomposition de l'identité sur un espace de Hilbert H.*

Soit $T : H \longrightarrow H$ *linéaire. Alors on a* $\|T\|_{HS}^2 = \sum_j \|Tx_j\|_2^2$ *où* $\|.\|_{HS}$ *désigne la norme de Hilbert-Schmidt.*

Démonstration. $\|T\|_{HS}^2 = Tr(TT^*)$.
On a $TT^* = \sum_j Tx_j \otimes Tx_j$
en effet, si $y \in H$,

$$\begin{aligned}\sum_j Tx_j \otimes Tx_j(y) &= \sum_j < Tx_j, y > Tx_j \\ &= T(\sum_j < x_j, T^*y > x_j) \\ &= T(\sum_j x_j \otimes x_j(T^*y)) \\ &= TT^*(y)\end{aligned}$$

ainsi $\|T\|_{HS}^2 = Tr(TT^*) = Tr(\sum_j Tx_j \otimes Tx_j) = \sum_j \|Tx_j\|^2$.

Remarques. On a toujours $\|T\|_{HS}^2 \leq \|T\|^2 rang(T)$.

Lemme 5.2. *Soit* $Id = \sum_j x_j \otimes x_j$ *décomposition de l'identité sur H. Alors* $(x_j)_j$ *est 1-Hilbertienne.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si $u = a \otimes b$ alors $u^* = b \otimes a$.
Soit $(e_j)_j$ base orthonormée de H.
Si $x \in H$, $\|x\|_2^2 =< x, x >= \sum_j | < x_j, x > |^2$.
$\| \sum_j x_j \otimes e_j(x)\|_2^2 = \sum_j | < x_j, x > |^2 = \|x\|_2^2$
Ainsi $\| \sum_j x_j \otimes e_j\|_{2\to 2} = 1$ et par dualité $\| \sum_j e_j \otimes x_j\|_{2\to 2} = 1$.
Soit $(a_j)_j$ suite de scalaires :
$\| \sum_j e_j \otimes x_j(\sum_k a_k e_k)\|_2 \leq \| \sum_j e_j \otimes x_j\|_{2\to 2}.\| \sum_k a_k e_k\|_2 = (\sum_j |a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$
et $\| \sum_j e_j \otimes x_j(\sum_k a_k e_k)\|_2 = \| \sum_j a_j x_j\|_2$.
Ainsi $\| \sum_j a_j x_j\|_2 \leq (\sum_j |a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ donc $(x_j)_j$ est 1-Hilbertienne.

Théorème 5.1 (Kashin-Tzafriri). *A opérateur linéaire sur l_2^m de norme 1. Soit $\frac{c}{m} < \lambda < 1$.*
Alors $\exists \nu \subset \{1,..,m\}$ avec $|\nu| \geq \frac{\lambda m}{4}$ tel que :
$\|P_\nu A\|_{2\to 2} \leq c(\sqrt{\lambda} + \frac{\|A\|_{HS}}{\sqrt{m}})$. P_ν désigne la projection sur les coordonnées de ν.

Démonstration. Soit $(\xi_j)_{j\leq m}$ variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0,1\}$ et d'espérance λ.
On note P_ξ la projection sur $vect\{e_j/\ \xi_j = 1\}$
Soit $(\xi'_j)_{j\leq m}$ copie indépendante de $(\xi_j)_{j\leq m}$, et $(\varepsilon_j)_{j\leq m}$ des variables de bernouilli indépendantes ± 1
On va estimer $\|.\|_{2\to 1}$ et par la proposition 4.2 on a une estimation pour $\|.\|_{2\to 2}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|P_\xi A\|_{2\to 1} &= \mathbb{E} \sup_{x\in B_2^m} \sum_{j\leq m} \xi_j |<Ax, e_j>| \\
&\leq \lambda \sup_{x\in B_2^m} \sum_{j\leq m} |<Ax, e_j>| + \mathbb{E} \sup_{x\in B_2^m} \sum_{j\leq m} (\xi_j - \xi'_j)|<Ax, e_j>|
\end{aligned}$$

Or par Cauchy-Schwartz $\sup\limits_{x\in B_2^m} \sum\limits_{j\leq m} |<Ax, e_j>| \leq \sqrt{m}\|A\|_{2\to 2} = \sqrt{m}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{x\in B_2^m} \sum_{j\leq m} (\xi_j - \xi'_j)|<Ax, e_j>| &= \mathbb{E} \sup_{x\in B_2^m} \sum_{j\leq m} \varepsilon_j(\xi_j - \xi'_j)|<Ax, e_j>| \\
&\leq 2\mathbb{E} \sup_{x\in B_2^m} \sum_{j\leq m} \varepsilon_j \xi_j |<Ax, e_j>| \\
&\leq 2\sqrt{2\pi}\mathbb{E} \sup_{x\in B_2^m} \sum_{j\leq m} g_j \xi_j |<Ax, e_j>| \\
&\quad \textit{par le principe de contraction.}
\end{aligned}$$

On pose $X_x = \sum\limits_{j\leq m} g_j\xi_j |<Ax, e_j>|$ et $Y_x = \sum\limits_{j\leq m} g_j\xi_j <Ax, e_j>$
Clairement $|X_x - X_y| \leq |Y_x - Y_y|$ ainsi par le lemme slepian on a
$\mathbb{E} \sup\limits_{x\in B_2^m} X_x \leq \mathbb{E} \sup\limits_{x\in B_2^m} Y_x$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{x\in B_2^m}\sum_{j\leq m}(\xi_j-\xi_j')| < Ax, e_j > | &\leq 2\sqrt{2\pi}\mathbb{E}\sup_{x\in B_2^m}\sum_{j\leq m} g_j\xi_j < Ax, e_j > \\ &= 2\sqrt{2\pi}\mathbb{E}\|\sum_{j\leq m} g_j\xi_j{}^tAe_j\|_2 \\ &\leq 2\sqrt{2\pi}(\mathbb{E}\|\sum_{j\leq m} g_j\xi_j{}^tAe_j\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \qquad par\ Jensen \\ &= 2\sqrt{2\pi}(\mathbb{E}\sum_{j\leq m}\|\xi_j{}^tAe_j\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\sqrt{2\pi}.\sqrt{\lambda}.\|{}^tA\|_{HS}\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}\|P_\xi A\|_{2\to 1} \leq \lambda\sqrt{m} + 2\sqrt{2\pi}.\sqrt{\lambda}.\|A\|_{HS}$
Ainsi par Markov, $\mathbb{P}(\|P_\xi A\|_{2\to 1} \leq 2(\lambda\sqrt{m} + 2\sqrt{2\pi}.\sqrt{\lambda}.\|A\|_{HS})) \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sum_{j\leq m}\xi_j - m\lambda)^2 &= \mathbb{E}(\sum_{j\leq m}\xi_j)^2 + n^2\lambda^2 - 2m\lambda\mathbb{E}\sum_{j\leq m}\xi_j \\ &= m\lambda + m(m-1)\lambda^2 + m^2\lambda^2 - 2m^2\lambda^2 \\ &= m\lambda - m\lambda^2 \\ &\leq m\lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sum_{j\leq m}\xi_j < \frac{m\lambda}{2}) &= \mathbb{P}(\sum_{j\leq m}\xi_j - m\lambda < -\frac{m\lambda}{2}) \\ &\leq \mathbb{P}((\sum_{j\leq m}\xi_j - m\lambda)^2 > \frac{m^2\lambda^2}{4}) \\ &\leq \frac{4}{m\lambda} \qquad par\ Markov\end{aligned}$$

Ainsi
$\mathbb{P}(\|P_\xi A\|_{2\to 1} \leq 2(\lambda\sqrt{m} + 2\sqrt{2\pi}.\sqrt{\lambda}.\|A\|_{HS})\ et\ \sum_{j\leq m}\xi_j \geq \frac{m\lambda}{2}) \geq \frac{1}{2} - \frac{4}{m\lambda} > 0$
dès que $\lambda > \frac{8}{m}$
Il existe alors un choix des $(\xi_j)_{j\leq m}$ tel que :
$\|P_\xi A\|_{2\to 1} \leq 2(\lambda\sqrt{m} + 2\sqrt{2\pi}.\sqrt{\lambda}.\|A\|_{HS})\ et\ \sum_{j\leq m}\xi_j \geq \frac{m\lambda}{2}$

Soit $\sigma = \{j/\ \xi_j = 1\}$
$|\sigma| \geq \frac{m\lambda}{2}$ et $\|P_\sigma A\|_{2\to 1} \leq 2(\lambda\sqrt{m} + 2\sqrt{2\pi}.\sqrt{\lambda}.\|A\|_{HS})$
On applique la poposition 4.2 à $P_\sigma A$, on a alors :
$\exists \nu \subset \sigma$ avec $|\nu| \geq \frac{|\sigma|}{2} \geq \frac{\lambda m}{4}$ tel que :

$$\|P_\nu P_\sigma A\|_{2\to 2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{|\sigma|}}\|P_\sigma A\|_{2\to 1} \leq c(\sqrt{\lambda} + \frac{\|A\|_{HS}}{\sqrt{m}})$$

Remarques.
On pouvait éviter le passage par les gaussiennes et le lemme de slepian.
En effet, par le Théorème 2.1 de [10] on a

$$\mathbb{E} \sup_{x\in B_2^m} \sum_{j\leq m} \varepsilon_j \xi_j | < Ax, e_j > | \leq 2\mathbb{E} \sup_{x\in B_2^m} \sum_{j\leq m} \varepsilon_j \xi_j < Ax, e_j >$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{x\in B_2^m} \sum_{j\leq m} (\xi_j - \xi_j')| < Ax, e_j > | &= \mathbb{E} \sup_{x\in B_2^m} \sum_{j\leq m} \varepsilon_j(\xi_j - \xi_j')| < Ax, e_j > | \\
&\leq 2\mathbb{E} \sup_{x\in B_2^m} \sum_{j\leq m} \varepsilon_j \xi_j | < Ax, e_j > | \\
&\leq 4\mathbb{E} \sup_{x\in B_2^m} \sum_{j\leq m} \varepsilon_j \xi_j < Ax, e_j > \\
&= 4\mathbb{E}\| \sum_{j\leq m} \varepsilon_j \xi_j {}^t A e_j\|_2 \\
&\leq 4(\mathbb{E}\| \sum_{j\leq m} \varepsilon_j \xi_j {}^t A e_j\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= 4(\mathbb{E} \sum_{j\leq m} \|\xi_j {}^t A e_j\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= 4\sqrt{\lambda}\|{}^t A\|_{HS}
\end{aligned}$$

Et on continue la preuve de la même manière.

On peut reformuler le théorème 5.1 de la façon suivante :

Théorème 5.2. *Si $(x_j)_{j\leq m}$ est 1-hilbertienne et $h = \sum_{j\leq m} \|x_j\|^2$.*
Pour $\frac{1}{m} \leq \lambda \leq 1$ fixé, $\exists \nu \subset \{1, .., m\}$ avec $|\nu| \geq \frac{\lambda m}{4}$ tel que :
$(Kx_j)_{j\in\nu}$ est c-hilbertienne où $K = (\sqrt{\lambda} + \sqrt{\frac{h}{m}})^{-1}$ et c une constante.

On a Théorème 5.1 $\Leftrightarrow$ Théorème 5.2.
en effet,

$\Rightarrow$) Soit $(x_j)_{j\leq m}$ 1-hilbertienne ; $h = \sum_{j\leq m} \|x_j\|^2$

On définit A tel que $Ae_j = x_j$. Alors $\|A\| \leq 1$ et $h = \|A\|^2_{HS}$

Théorème 5.1 $\Rightarrow \exists \subset \{1,..,m\}$, $|\nu| \geq \frac{\lambda m}{4}$ tel que $\|P_\nu A\| \leq cK^{-1}$ où $K = (\sqrt{\lambda} + \sqrt{\frac{h}{m}})^{-1}$.

Ainsi $\|\sum_{j\in\sigma} a_j x_j\| \leq \frac{c}{K}(\sum_{j\in\sigma} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$

Donc $(Kx_j)_{j\in\sigma}$ est c-hilbertienne.

$\Leftarrow$) Soit A opérateur linéaire sur l_2^m de norme 1.

Soit $x_j = Ae_j$; $(x_j)_{j\leq m}$ est 1-hilbertienne car $\|A\| = 1$.

$h = \sum_{j\leq m} \|x_j\|^2 = \|A\|^2_{HS}$.

Théorème 5.4 $\Rightarrow \exists\nu \subset \{1,..,m\}$ avec $|\nu| \geq \frac{\lambda m}{4}$ tel que $(Kx_j)_{j\in\nu}$ est c-hilbertienne.

Ainsi $\|\sum_{j\in\nu} a_j Ae_j\| \leq c(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\frac{h}{m}}).(\sum_{j\in\nu} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$

c.à.d $\|P_\nu A\| \leq c(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\frac{h}{m}})$.

Théorème 5.3 (Bourgain-Tzafriri). *Soit $T : l_2^n \longrightarrow l_2^n$ opérateur linéaire tel que $\|Te_j\|_2 = 1 \;\; \forall j = 1..n$.*
Alors $\exists\sigma \subset \{1,..,n\}$ avec $|\sigma| \geq \frac{cn}{\|T\|^2}$ tel que :
$\|\sum_{j\in\sigma} a_j Te_j\| \geq c(\sum_{j\in\sigma} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ *pour toute suite de scalaires $(a_j)_{j\in\sigma}$.*
c étant une constante numérique.

Afin de démontrer le théorème 5.3, nous avons besoin de deux lemmes :

Lemme 5.3. *Soit T opérateur linéaire sur l_2^n avec $\|Te_j\|_2 = 1 \;\; \forall j = 1..n$.*
Alors $\exists\sigma_1 \subset \{1,..,n\}$ avec $|\sigma_1| \geq \frac{c_1 n}{\|T\|^2}$ tel que :
$\|P_{[Te_j]_{j\in\sigma_1\setminus\{i\}}} Te_i\|_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \forall i \in \sigma_1$.
c_1 étant une constante numérique, et P_E la projection orthogonale sur l'espace vectoriel E.

Démonstration. On pose $x_i = Te_i$.
Soit $\delta \in [0,1]$ qui sera fixé plutard.

Soit $(\xi_i)_{i\leq n}$ variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0,1\}$ et d'espérance δ.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\|P_{[\xi_j x_j]_{j\neq i}}x_i\|_2^2 &= \delta\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}\|P_{[\xi_j x_j]_{j\neq i}}x_i\|_2^2 \\
&\leq \delta\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}\|P_{[\xi_j x_j]_{j=1..n}}Te_i\|_2^2 \\
&= \delta\mathbb{E}\|P_{[\xi_j x_j]_{j=1..n}}T\|_{HS}^2 \\
&\leq \delta\|T\|^2\mathbb{E}(rang\ P_{[\xi_j x_j]_{j=1..n}}) \\
&= \delta\|T\|^2\mathbb{E}\sum_{j=1}^{n}\xi_j \\
&= n\delta^2\|T\|^2
\end{aligned}$$

Ainsi par Markov, $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\|P_{[\xi_j x_j]_{j\neq i}}x_i\|_2^2 \leq 2n\delta^2\|T\|^2) \geq \frac{1}{2}$.

D'autre part, $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i - n\delta)^2 = n\delta + n(n-1)\delta^2 + n^2\delta^2 - 2n^2\delta^2 = n\delta - n\delta^2 \leq n\delta$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i < \frac{n\delta}{2}) &= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i - n\delta < -\frac{n\delta}{2}) \\
&\leq \mathbb{P}((\sum_{i=1}^{n}\xi_i - n\delta)^2 > \frac{n^2\delta^2}{4}) \\
&\leq \frac{4}{n\delta} \quad Par\ Markov.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\|P_{[\xi_j x_j]_{j\neq i}}x_i\|_2^2 \leq 2n\delta^2\|T\|^2\ et\ \sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq \frac{n\delta}{2}) \geq \frac{1}{2} - \frac{4}{n\delta} > 0$ dès que $\delta > \frac{8}{n}$.
Il existe alors un choix des ξ_i tel que :
$\sum_{i=1}^{n}\xi_i\|P_{[\xi_j x_j]_{j\neq i}}x_i\|_2^2 \leq 2n\delta^2\|T\|^2\ et\ \sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq \frac{n\delta}{2}$.
Soit $\sigma = \{i \leq n/\ \xi_i = 1\}$.

$|\sigma| = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \geq \frac{n\delta}{2}$ et $\sum_{i \in \sigma} \|P_{[x_j]_{j\in\sigma\setminus\{i\}}} x_i\|_2 \leq 2n\delta^2 \|T\|^2$.
Soit $\sigma_1 = \{i \in \sigma / \ \|P_{[x_j]_{j\in\sigma\setminus\{i\}}} x_i\|_2 < 2\sqrt{2}\|T\|\sqrt{\delta}\}$

$$\begin{aligned}
2n\delta^2\|T\|^2 &\geq \sum_{i\in\sigma} \|P_{[x_j]_{j\in\sigma\setminus\{i\}}} x_i\|_2^2 \\
&\geq \sum_{i\in\sigma\setminus\sigma_1} \|P_{[x_j]_{j\in\sigma\setminus\{i\}}} x_i\|_2^2 \\
&\geq 8\delta\|T\|^2.|\sigma \setminus \sigma_1|
\end{aligned}$$

Ainsi $|\sigma \setminus \sigma_1| \leq \frac{n\delta}{4}$. Parsuite $|\sigma_1| \geq \frac{n\delta}{4}$.
Pour conclure, il suffit de prendre $\delta = \frac{1}{16\|T\|^2}$.
Ainsi $|\sigma_1| \geq \frac{n}{64\|T\|^2}$ et $\|P_{[x_j]_{j\in\sigma\setminus\{i\}}} x_i\|_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\forall i \in \sigma_1$.

Remarques.

1. Le δ choisi vérifie bien que $\delta > \frac{c}{n}$ pour un bon choix de la constante c.
   Pour ça, il faut et il suffit que $\|T\| \leq c'\sqrt{n}$
   en effet, si $x \in B_2^n$, $x = \sum_{i\leq n} x_i e_i$. $(e_i)_{i\leq n}$ étant la base canonique de l_2^n.

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_2^2 &= \|\sum_{i\leq n} x_i Te_i\|_2^2 \\
&=< \sum_{i\leq n} x_i Te_i, \sum_{j\leq n} x_j Te_j > \\
&= \sum_{i,j\leq n} x_i x_j < Te_i, Te_j > \\
&\leq \sum_{i,j\leq n} x_i x_j \\
&\leq (\sum_{i,j\leq n} x_i^2 x_j^2)^{\frac{1}{2}}.(n^2)^{\frac{1}{2}} \quad \textit{par Cauchy} - \textit{Schwartz} \\
&= n
\end{aligned}$$

   Ainsi $\|T\| \leq \sqrt{n}$.

2. Le lemme 5.3 nous permet de choisir des vecteurs Te_i qui sont linéairement indépendants, ce qui est une condition nécessaire pour que $(Te_i)_i$ soit besselienne.
   en effet, $d(x_i, [x_j]_{j\neq i})^2 = \|x_i\|_2^2 - \|P_{[x_j]_{j\neq i}} x_i\|_2^2 > \frac{1}{2} \quad \forall i$ ce qui assure qu'ils sont libres.

Lemme 5.4. *Soit* $T : l_2^n \longrightarrow l_2^n$ *opérateur linéaire avec* $\|Te_j\|_2 = 1 \ \forall j = 1..n$. *Alors* $\exists \sigma_2 \subset \{1, .., n\}$ *avec* $|\sigma_2| \geq \frac{c_2 n}{\|T\|^2}$ *tel que :*
$\| \sum_{j\in\sigma_2} a_j Te_j\|_2 \geq c_2 \sum_{j\in\sigma_2} \frac{|a_j|}{\sqrt{|\sigma_2|}}$ *pour toute suite de scalaires* $(a_j)_{j\in\sigma_2}$.

Démonstration. Soit c_1 et σ_1 comme dans le lemme 5.3.
On pose $u_i' = x_i - P_{[x_j]_{j\neq i}} x_i$
On a évidemment $< u_i', x_j >= 0 \quad \forall j \neq i$.
$< u_i', x_i >= \|x_i\|_2^2 - < P_{[x_j]_{j\neq i}} x_i, x_i >= \|x_i\|_2^2 - \|P_{[x_j]_{j\neq i}} x_i\|_2^2 > \frac{1}{2}$ par le lemme 5.3.
$\|u_i'\|_2^2 =< u_i', u_i' >= \|x_i\|_2^2 - \|P_{[x_j]_{j\neq i}} x_i\|_2^2 =< u_i', x_i >$.
On pose $u_i = \frac{u_i'}{\|u_i'\|_2}$.
$< u_i, x_j >= 0$ si $i \neq j$ et $< u_i, x_i >= \frac{1}{\|u_i'\|_2}\|u_i'\|_2^2 > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Soit $\Gamma = \{(\varepsilon_i)_{i\in\sigma_1} \in \{-1, 1\}^{|\sigma_1|} / \ \| \sum_{i\in\sigma_1} \varepsilon_i u_i\| \leq 2\sqrt{|\sigma_1|}\}$.
$\mathbb{E}\| \sum_{i\in\sigma_1} \varepsilon_i u_i\|_2^2 = \sum_{i\in\sigma_1} \|u_i\|_2^2 = |\sigma_1|$.
$2^{|\sigma_1|}.|\sigma_1| = \int \| \sum_{i\in\sigma_1} \varepsilon_i u_i\|_2^2 d\varepsilon \geq \int_{\Gamma^c} \sum_{i\in\sigma_1} \varepsilon_i u_i\|_2^2 d\varepsilon \geq 4|\sigma_1|.|\Gamma|$.
Alors $|\Gamma| \leq \frac{2^{|\sigma_1|}}{4}$ et donc $|\Gamma| \geq \frac{3.2^{|\sigma_1|}}{4}$.
On a alors $|\Gamma| > \sum_{i=0}^{k-1} \binom{|\sigma_1|}{i}$ pour $k \geq \frac{|\sigma_1|}{2}$.
Par le lemme de Sauer-Shelah, $\exists \sigma_2 \subset \sigma_1$ avec $|\sigma_2| = k$ tel que tout $(\theta_i)_{i\in\sigma_2}$ est restriction d'un $(\varepsilon_i)_{i\in\sigma_1}$ dans Γ.
$|\sigma_2| \geq \frac{|\sigma_1|}{2} \geq \frac{c_1 n}{2\|T\|^2}$.
Soit $(a_j)_{j\in\sigma_2}$ suite de scalaires.
On écrit $a_j = b_j + ic_j$.
Soient $(\theta_j)_{j\in\sigma_2}$ et $(\theta_j')_{j\in\sigma_2}$ les signes respectifs de $(b_j)_{j\in\sigma_2}$ et $(c_j)_{j\in\sigma_2}$.
Soient $(\varepsilon_j)_{j\in\sigma_1}$ et $(\varepsilon_j')_{j\in\sigma_1}$ les extensions respectives de $(\theta_j)_{j\in\sigma_2}$ et $(\theta_j')_{j\in\sigma_2}$

dans Γ.

$$\begin{aligned} < \sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j, \sum_{j\in\sigma_1}(\varepsilon_j - i\varepsilon'_j)u_j > \ &\leq \| \sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j\|.\| \sum_{j\in\sigma_1}(\varepsilon_j - i\varepsilon'_j)u_j\| \\ &\leq \| \sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j\|.(\| \sum_{j\in\sigma_1} \varepsilon_j u_j\| + \| \sum_{j\in\sigma_1} \varepsilon'_j u_j\|) \\ &\leq \| \sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j\|.4\sqrt{|\sigma_1|} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} | < \sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j, \sum_{j\in\sigma_1}(\varepsilon_j - i\varepsilon'_j)u_j > | &= | \sum_{j\in\sigma_2} [(\theta_j b_j + \theta'_j c_j) + i(\theta_j c_j - \theta'_j b_j)] < x_j, u_j > | \\ & \quad car \ \ < u_i, x_j >= 0 \ si \ i \neq j \\ &= | \sum_{j\in\sigma_2} [(|b_j| + |c_j|) + i(\theta_j c_j - \theta'_j b_j)] < x_j, u_j > | \\ &\geq | \sum_{j\in\sigma_2} (|b_j| + |c_j|) < x_j, u_j > | \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j\in\sigma_2} |a_j| \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \| \sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j\| &\geq \frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt{|\sigma_1|}} \sum_{j\in\sigma_2} |a_j| \\ &\geq \frac{1}{8\sqrt{|\sigma_2|}} \sum_{j\in\sigma_2} |a_j| \end{aligned}$$

Remarques.
Si u est l'application qui à Te_i donne e_i.
Alors le lemme 5.4 dit que $\|u\|_{l_2^n \to l_1^{|\sigma_2|}} \leq \frac{\sqrt{|\sigma_2|}}{c_2}$.
Et par dualité, $\|u^*\|_{l_\infty^{|\sigma_2|} \to l_2^n} \leq \frac{\sqrt{|\sigma_2|}}{c_2}$

On peut à présent passer à la démonstration du théorème 5.3 :
Démonstration.(Théorème 5.3)
En utilisant la proposition 4.2, le théorème 5.3 découle directement.
en effet, en notant $u : l_2^n \longrightarrow l_1^{|\sigma_2|}$ qui à Te_i donne e_i.

Par le lemme 5.4, on a $\|u\|_{2\to1} \leq \frac{\sqrt{|\sigma_2|}}{c_2}$
Par la proposition 4.2, on a : $\exists \tau \subset \sigma_2$ avec $|\tau| \geq \frac{|\sigma_2|}{2}$ tel que
$\|P_\tau u\|_{2\to2} \leq (\frac{\pi}{|\sigma_2|})^{\frac{1}{2}}.\|u\|_{2\to1} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{c_2}$
Ainsi $\forall (a_j)_{j\in\tau}$, $\displaystyle (\sum_{j\in\tau} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{c_2} \| \sum_{j\in\tau} a_j Te_j\|_2$

Remarques.
L'argument de factorisation de Grothendieck n'est pas nécessaire, on pouvait procéder à la main par un argument d'itération mais la preuve serait beaucoup plus longue. (voir [4])

On peut reformuler le théorème 5.3 de la façon suivante :

Théorème 5.4. *Soit $(x_j)_{j\leq n}$ K-hilbertienne avec $\|x_j\| \geq \alpha \quad \forall j = 1..n$. Alors $\exists \sigma \subset \{1,..,n\}$ avec $|\sigma| \geq c(\frac{\alpha}{K})^2 n$ tel que $(x_j)_{j\in\sigma}$ soit $(\frac{c_1}{\alpha})$-besselienne.*

On a Théorème 5.3 $\Leftrightarrow$ Théorème 5.4.
En effet,

$\Rightarrow$) Soit $(x_j)_{j\leq n}$ K-hilbertienne avec $\|x_j\| \geq \alpha \quad \forall j = 1..n$.
Soit T opérateur linéaire tel que $Te_j = \frac{1}{\alpha} x_j$. $\quad \|Te_j\| \geq 1$.
$(x_j)_{j\leq n}$ K-hilbertienne donc $\displaystyle \|T(\sum_{j\leq n} a_j e_j)\| \leq \frac{K}{\alpha}(\sum_{j\leq n}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$.
Ainsi $\|T\| \leq \frac{K}{\alpha}$.
Théorème 5.3 $\Rightarrow \exists \sigma \subset \{1,..,n\}$ avec $|\sigma| \geq \frac{c_1 n}{\|T\|^2} \geq c_1(\frac{\alpha}{K})^2 n$ tel que
$\displaystyle \|\sum_{j\in\sigma} a_j Te_j\| \geq c(\sum_{j\in\sigma}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$
c.à.d $\displaystyle \frac{c}{\alpha}\|\sum_{j\in\sigma} a_j x_j\| \geq (\sum_{j\in\sigma}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ donc $(x_j)_{j\in\sigma}$ est $(\frac{c'}{\alpha})$-besselienne.

$\Leftarrow$) Soit T opérateur linéaire tel que $\|Te_j\| = 1 \quad \forall j = 1..n$
Soit $x_j = Te_j$; $\|x_j\| = 1$.
$(x_j)_{j\leq n}$ est $\|T\|$-hilbertienne.
Théorème 5.4 $\Rightarrow \exists \sigma \subset \{1,..,n\}$ avec $|\sigma| \geq c\frac{n}{\|T\|^2}$ tel que
$\displaystyle \|\sum_{j\in\sigma} a_j Te_j\| \geq c(\sum_{j\in\sigma}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$.

6 Généralisation du Principe d'Invertibilité et applications

Etant donné un système $(x_j)_{j\leq n}$ hilbertien ou besselien. Il est agréable de travailler avec des vecteurs ayant presque des normes égales, tout en gardant le caractère hilbertien ou besselien.
On introduit la procédure de "split" suivante :
On définit des vecteurs $(y_k)_{k\in\sigma_j}$ qui sont des multiples de x_j
et $\sum_{k\in\sigma_j} \|y_k\|^2 = \|x_j\|^2$
Ainsi si on note $h = \sum_{j\leq n} \|x_j\|^2$ et $p = \min_{j\leq n} \|x_j\|$
pour tout j on ecrit $\|x_j\|^2 = a_1^2\|x_j\|^2 + ... + a_l^2\|x_j\|^2$ tel que $p \leq a_k\|x_j\| \leq 1,1p$
On pose $(y_k)_{k\in\sigma_j}$ comme étant les $a_k x_j$
On a donc en tout $(y_k)_{k\leq m}$ vérifiant $p \leq \|y_k\| \leq 1,1p$
$\sum_{k\leq m} \|y_k\|^2 = h$ et alors $p^2 m \leq h \leq (1,1)^2 p^2 m$ c.à.d $p \leq \sqrt{\frac{h}{m}} \leq 1,1p$
Ainsi on a $0,9\sqrt{\frac{h}{m}} \leq \|y_k\| \leq 1,1\sqrt{\frac{h}{m}} \qquad \forall k \leq m$

Théorème 6.1 (Vershynin). *Si $Id = \sum_{j\leq m} x_j \otimes x_j$ et T opérateur linéaire sur l_2^n de norme 1.*
Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \sigma \subset \{1,..,n\}$ avec $|\sigma| \geq (1-\varepsilon)\|T\|_{HS}^2$ tel que :

(i) *$(Tx_j)_{j\in\sigma}$ est $C(\varepsilon)$-équivalente à une base orthonormée de l_2^σ.*

(ii) *$\|Tx_j\| \geq c\sqrt{\varepsilon}\frac{\|T\|_{HS}}{\sqrt{n}}\|x_j\| \qquad \forall j \in \sigma$.*

Démonstration. On pose $h = \|T\|_{HS}^2$ et $y_j = Tx_j \quad \forall j \leq m$.
Par le "split", on peut supposer que $0,9\sqrt{\frac{h}{m}} \leq \|y_j\| \leq 1,1\sqrt{\frac{h}{m}}$
Soit $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.
Soit $\tau = \{j \leq m / \ \|y_j\| \geq 0.9\sqrt{\delta}\sqrt{\frac{h}{n}}\|x_j\|\}$
on a $|\tau| \geq (1-\delta)m$.

en effet,

$$\begin{aligned} n = \sum_{j\le m} \|x_j\|^2 &\ge \sum_{j\in\tau^c} \|x_j\|^2 \\ &\ge |\tau^c|.\frac{n}{h\delta(0.9)^2}.\|y_j\|^2 \\ &\ge |\tau^c|.\frac{n}{h\delta(0.9)^2}.(0.9)^2\frac{h}{m} \end{aligned}$$

donc $|\tau^c| \le m\delta$ et $|\tau| \ge (1-\delta)m$.
Afin de continuer la preuve, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 6.1. *Soit $\sigma \subset \tau$ avec $|\sigma| < (1-\varepsilon)h$ et supposons que $(y_j)_{j\in\sigma}$ est K-équivalente à une base orthonormée de l_2^σ. Alors on peut étendre σ en σ_1 dans τ tel que :*

(a) *$(y_j)_{j\in\sigma_1}$ est $C(\varepsilon, K)$-équivalente à une base orthonormée de $l_2^{\sigma_1}$.*

(b) *$(h - |\sigma_1|) \le \alpha(h - |\sigma|)$ avec $\alpha < 1$.*

Remarques. Dans la preuve et dans la suite aussi, c désigne une constante qui peut changer de valeur d'une ligne à l'autre. Parfois je vais essayer de changer le nom des constantes afin d'éviter trop de confusion.

Démonstration. On note P la projection orthogonale sur $l_2^n \ominus vect(y_j)_{j\in\sigma}$.
$\sum_{j\le m} \|Py_j\|^2 = \sum_{j\le m} \|PTx_j\|^2 = \|PT\|_{HS}^2$.

$$\begin{aligned} \sum_{j\le m} \|Py_j\|^2 &= \|T\|_{HS}^2 - \|(Id-P)T\|_{HS}^2 \\ &\ge h - \|T\|^2.rang(Id-P) \\ &= h - |\sigma| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\tau\setminus\sigma}\|Py_j\|^2 &= \sum_{j\in\tau}\|Py_j\|^2 \\
&= \sum_{j\leq m}\|Py_j\|^2 - \sum_{j\in\tau^c}\|Py_j\|^2 \\
&\geq h - |\sigma| - |\tau^c|.1,21.\frac{h}{m} \\
&\geq h - |\sigma| - 2\delta h \\
&= (1-2\delta)h - |\sigma| \\
&= h_0
\end{aligned}$$

Comme $|\sigma| < (1-\varepsilon)h$ alors $h_0 \geq \delta h$.
On applique la procédure de "split" à $(y_j)_{j\in\tau\setminus\sigma}$ pour obtenir $(y'_j)_{j\leq M}$ tel que $\|Py'_j\| \geq 0,9\sqrt{\frac{h_0}{M}} \qquad \forall j \leq M$
Par le lemme 5.2, $(x_j)_j$ est 1-hilbertienne.
Comme $\|T\| = 1$, alors $(y_j)_j$ est 1-hilbertienne.
Ainsi $(y'_j)_{j\leq M}$ est c-hilbertienne et $\sum_{j\leq M}\|y'_j\|^2 \leq \sum_{j\leq m}\|y_j\|^2 = h$.
Par le théorème 5.2, appliqué à $\lambda = \frac{4h}{M}$ on a :
$\exists\nu \subset \{1,..,M\}$ avec $|\nu| \geq h$ tel que

$$(\sqrt{\frac{M}{h}}y'_j)_{j\in\nu} \; est \; c' - hilbertienne. \tag{3}$$

Ainsi $(\sqrt{\frac{M}{h}}Py'_j)_{j\in\nu}$ est aussi c'-hilbertienne et $\|\sqrt{\frac{M}{h}}Py'_j\| \geq 0,9\sqrt{\frac{M}{h}}\sqrt{\frac{h_0}{M}} \geq 0,9\delta$.
Alors par le théorème 5.4,
$\exists\rho' \subset \nu$ avec $|\rho'| \geq c\delta|\nu| \geq c\delta h$ tel que

$$(\sqrt{\frac{M}{h}}Py'_j)_{j\in\rho'} \; est \; (\frac{c_1}{\sqrt{\delta}}) - besselienne. \tag{4}$$

Pour $j \in \rho'$, y'_j est un multiple de $y_{\kappa(j)}$ où $\kappa(j) \in \tau\setminus\sigma$.
$(\sqrt{\frac{M}{h}}Py'_j)_{j\in\rho'}$ étant besselienne alors les $(y'_j)_{j\in\rho'}$ sont linéairement indépendants, donc il en est de même pour les $y_{\kappa(j)}$.
Ainsi $j \longrightarrow \kappa(j)$ est bijective.

Soit $\rho = \{\kappa(j)/\ j \in \rho'\}$.
$|\rho| = |\rho'| \geq c\delta h$.
Soit $\sigma_1 = \sigma \cup \rho$. ρ et σ sont disjoints.

$$\begin{aligned} h - |\sigma_1| &= h - |\sigma| - |\rho| \\ &\leq h - |\sigma| - c\delta h \\ &\leq (1 - c\delta)(h - |\sigma|) \end{aligned}$$

D'où le (b) du lemme est vérifiée pour σ_1.
Reste à montrer que $(y_j)_{j\in\sigma_1}$ est équivalente à une base orthonormée de $l_2^{\sigma_1}$.
Par (3) et (4), $\exists(\lambda_j)_{j\in\rho}$ tel que $(\lambda_j y_j)_{j\in\rho}$ est c'-hilbertienne et $(\lambda_j P y_j)_{j\in\rho}$ est $\frac{c_1}{\sqrt{\delta}}$-besselienne.
$(y_j)_{j\in\sigma}$ est K-équivalente à une base orthonormée de l_2^{σ}.
Ainsi $\exists(\lambda_j)_{j\in\sigma}$ tel que $(\lambda_j y_j)_{j\in\sigma}$ est K-hilbertienne et 1-besselienne.

Si $y \in vect(y_j)_{j\in\rho}$ alors $y = \sum_{j\in\rho} a_j \lambda_j y_j$

$$\begin{aligned} \|Py\| &= \|\sum_{j\in\rho} a_j\lambda_j P y_j\| \\ &\geq \frac{\sqrt{\delta}}{c_1}(\sum_{j\in\rho}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \quad car\ (\lambda_j P y_j)_{j\in\rho}\ est\ \frac{c_1}{\sqrt{\delta}} - besselienne. \\ &\geq \frac{\sqrt{\delta}}{c_1 c'}\|\sum_{j\in\rho} a_j\lambda_j y_j\| \quad car\ (\lambda_j y_j)_{j\in\rho}\ est\ c' - hilbertienne. \\ &= \frac{\sqrt{\delta}}{c_1 c'}\|y\| \end{aligned}$$

Ainsi si $x \in vect(y_j)_{j\in\sigma}$

$$\begin{aligned}
(\|x\|^2+\|y\|^2)^{\frac{1}{2}} &\leq \|x\|+\|y\| \\
&\leq \|x+y\|+2\|y\| \\
&\leq \|x+y\|+\frac{2c_1c'}{\sqrt{\delta}}\|Py\| \\
&= \|x+y\|+\frac{2c_1c'}{\sqrt{\delta}}\|P(x+y)\| \\
&\leq (1+\frac{2c_1c'}{\sqrt{\delta}})\|x+y\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sum_{j\in\sigma_1}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}} &= (\sum_{j\in\sigma}|a_j|^2+\sum_{j\in\rho}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\|\sum_{j\in\sigma}a_j\lambda_jy_j\|^2+(\frac{c_1}{\sqrt{\delta}})^2\|\sum_{j\in\rho}a_j\lambda_jy_j\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (1+\frac{c}{\sqrt{\delta}}).(\frac{c_2}{\sqrt{\delta}}).\|\sum_{j\in\sigma_1}a_j\lambda_jy_j\|
\end{aligned}$$

Donc $(\lambda_jy_j)_{j\in\sigma_1}$ est $(1+\frac{c}{\sqrt{\delta}}).(\frac{c_2}{\sqrt{\delta}})$-besselienne.

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j\in\sigma_1}a_j\lambda_jy_j\| &\leq \|\sum_{j\in\sigma}a_j\lambda_jy_j\|+\|\sum_{j\in\rho}a_j\lambda_jy_j\| \\
&\leq K(\sum_{j\in\sigma}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}}+c'(\sum_{j\in\sigma}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2}(K+c').(\sum_{j\in\sigma_1}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ainsi $(\lambda_jy_j)_{j\in\sigma_1}$ est $\sqrt{2}(K+c')$-hilbertienne.
Donc $(y_j)_{j\in\sigma_1}$ est $(K+c).(1+\frac{c}{\sqrt{\delta}}).(\frac{c}{\sqrt{\delta}})$-équivalente à une base orthonormée de $l_2^{\sigma_1}$.

On peut à présent finir la démonstration du théorème 6.1 :
On commence avec $\sigma=\{1\}$ pour lequel c'est évident.
Par le lemme 6.1, on arrive à élargir σ dans τ.
Ainsi de suite jusqu'à avoir $|\sigma|\geq(1-\varepsilon)h$ et le théorème découle immédiatement.

Remarques.
Quelques mots sur la dépendance en ε qui joue un rôle important dans d'autres applications (comme le calcul de la distance au cube)

$\sigma = \{1\}$ et y_1 est c-équivalente à e_1
par le lemme 6.1, on construit σ_1 tel que $(y_j)_{j\in\sigma_1}$ est $(1+\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}).(\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}})$-équivalente à la base canonique de $l_2^{\sigma_1}$
Donc $(y_j)_{j\in\sigma_1}$ est $(\frac{c}{\varepsilon})$-équivalente à la base canonique de $l_2^{\sigma_1}$. La preuve donne $\sigma_1 = \sigma \cup \rho$ et par le Théorème 5.4 $|\rho| \geq c(\sqrt{\frac{M}{h}}\sqrt{\frac{h_0}{M}})^2 h = ch_0$.
(c est de l'ordre de $\frac{1}{2^8}$)
Ainsi $|\sigma_1| \geq |\sigma| + ch_0 = (1-c)|\sigma| + c(1-\frac{2\varepsilon}{3})h$

Par le lemme 6.1, on construit σ_2 tel que $(y_j)_{j\in\sigma_2}$ est $(\frac{c}{\varepsilon})^2$-équivalente à la base canonique de $l_2^{\sigma_2}$.

$$\begin{aligned}
|\sigma_2| &\geq (1-c)|\sigma_1| + c(1-\frac{2\varepsilon}{3})h \\
&\geq (1-c)^2|\sigma| + (1-\frac{2\varepsilon}{3})h.(c + c(1-c)) \\
&= (1-c)^2|\sigma| + (1-\frac{2\varepsilon}{3})h.(1-(1-c)^2)
\end{aligned}$$

Après k étapes, on construit σ_k avec
$|\sigma_k| \geq (1-c\varepsilon)^k.|\sigma| + (1-\frac{2\varepsilon}{3})h.(1-(1-c)^k)$ et tel que $(y_j)_{j\in\sigma_k}$ est $(\frac{c}{\varepsilon})^k$-équivalente à la base canonique de $l_2^{\sigma_k}$.

On continue le procédé jusqu'à avoir $|\sigma_k| \geq (1-\varepsilon)h$
Ceci est vrai dès que $(1-c)^k + (1-\frac{2\varepsilon}{3})h.(1-(1-c)^k) \geq (1-\varepsilon)h$
vrai dès que $(1-\frac{2\varepsilon}{3})h.(1-(1-c)^k) \geq (1-\varepsilon)h$ c.à.d $(1-c)^k \leq \frac{\frac{\varepsilon}{3}h}{(1-\frac{2\varepsilon}{3})h}$
Ceci est vrai dès que $(1-c)^k \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ainsi $k \geq \frac{log\ \frac{\varepsilon}{3}}{log(1-c)}$ suffit.
D'où $C(\varepsilon)$ est de l'ordre de $(\frac{c}{\varepsilon})^{c' log(\frac{1}{\varepsilon})}$. (c et c' étant des constantes positives)

Si on applique le théorème 6.1 à $Id = \sum_j e_j \otimes e_j$, on a :

Théorème 6.2. *Soit T opérateur linéaire sur l_2^n.*
Pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \sigma \subset \{1, .., n\}$ avec $|\sigma| \geq (1-\varepsilon)\frac{\|T\|_{HS}^2}{\|T\|^2}$ tel que

$$C(\varepsilon)\|T\|(\sum_{j\in\sigma}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|\sum_{j\in\sigma} a_j Te_j\| \leq C\|T\|(\sum_{j\in\sigma}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Remarques.
Ce théorème améliore en un certain sens le théorème 5.3.
En effet, sous les hypothèses du théorème 5.3, $\|T\|_{HS}^2 = n$ donc on avait σ de cardinal $\geq c_1\frac{\|T\|_{HS}^2}{\|T\|^2}$.
Dans ce théorème, on élargit σ et on obtient un σ de cardinal $\geq (1-\varepsilon)\frac{\|T\|_{HS}^2}{\|T\|^2}$ sans imposer des conditions sur $\|Te_j\|$ et ceci pour tout $\varepsilon \in [0,1]$ alors que le théorème 5.3 ne donnait que l'existence d'un tel ε.

On a déjà vu par le Théorème de John (Théorème 2.1), que la donnée d'un espace de Banach X en position de John était équivalente à la donnée d'une décomposition de l'identité. Ainsi on peut reformuler le Théorème 6.1 de la façon suivante :

Théorème 6.3. *Soit X un espace vectoriel normé de dimension n en position de John. Soit T opérateur linéaire avec $\|T\|_{2\to 2} \leq 1$.*
Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_1, ..x_k$ des points de contacts avec $k \geq (1-\varepsilon)\|T\|_{HS}^2$ tel que :

(i) *$(Tx_j)_{j\leq k}$ est $C(\varepsilon)$-équivalente pour la norme l_2 à une base orthonormée de l_2^k.*

(ii) $\|Tx_j\|_2 \geq c\sqrt{\varepsilon}\frac{\|T\|_{HS}}{\sqrt{n}} \quad \forall j \leq k.$

Théorème 6.4. *Soit X un espace vectoriel normé de dimension n en position de John. Soit T opérateur linéaire de norme 1. On note $h = \|T\|_{HS}^2$.*
Alors pour tout entier $k < h$, il existe $(x_j)_{j\leq k}$ des points de contacts tel que :

(i) *$(Tx_j)_{j\leq k}$ est $C(\frac{k}{h})$-équivalente à une base orthonormée de l_2^k.*

(ii) $\|Tx_j\| \geq c\sqrt{\frac{h-k}{n}}\|x_j\| \quad \forall j \leq k.$

Démonstration. Il suffit de prendre $\varepsilon = 1 - \frac{k}{h}$ et d'appliquer le Théorème 6.1.

Appliquons maintenant le Théorème 6.4 pour T projection orthogonale, Ceci va nous donner un lemme du type Dvoretzky-Rogers et en plus nous donne une information sur la position du système $(z_j)_j$ du lemme 3.2 .

Théorème 6.5. *Soit X un espace vectoriel normé de dimension n en position de John.*
Soit P une projection orthogonale de rang k.
Alors pour tout $s \leq k$, $\exists x_1, ..x_s$ des points de contacts tel que si on pose $z_j = \frac{Px_j}{\|Px_j\|_2}$, on a :

(i) $(z_j)_{j\leq s}$ *est $C(\frac{s}{k})$-équivalente pour la norme l_2 à une base orthonormée de l_2^s.*

(ii) $\|z_j\|_X \geq c\sqrt{\frac{k-s}{n}}$.

Démonstration. $\|P\|_{HS}^2 = k$
On applique alors le Théorème 6.4, ainsi $\forall s \leq k$, $\exists x_1, ..x_s$ des points de contacts tel que $(Px_j)_{j\leq s}$ est $C(\frac{s}{k})$-équivalente pour la norme l_2 à une base orthonormée de l_2^s et $\|Px_j\|_2 \geq c\sqrt{\frac{k-s}{n}}$.
$(z_j)_{j\leq s}$ est aussi $C(\frac{s}{k})$-équivalente pour la norme l_2 à une base orthonormée de l_2^s.
$\|z_j\|_X \geq < x_j, z_j > = \|Px_j\|_2 \geq c\sqrt{\frac{k-s}{n}}$ d'où le (ii).

Remarques.
Si on remplace P par un opérateur T tel que $\|T\|_{2\to 2} = 1$ et on remplace $k = \|P\|_{HS}^2$ par $\|T\|_{HS}^2$, on n'est pas sùr de garder l'estimation du (ii).
En effet, considérons l'exemple suivant :

Soit $n = 2^m$ et $X = l_\infty^n$.
Soit W la matrice de walsh $n \times n$. (c.à.d W matrice orthogonale formée de ± 1, elle existe car $n = 2^m$)
$\|W\|_{2\to 2} = \sqrt{n}$. Soit $T = \frac{1}{\sqrt{n}} W$.
On a alors $\|T\|_{2\to 2} = 1$ et $h = \|T\|_{HS}^2 = n$.

Les points de contacts de X sont les vecteurs coordonnées $(e_j)_{j\leq n}$.
Si $z_j = \frac{Te_j}{\|Te_j\|_2}$.
$\|Te_j\|_2 = \|e_j\|_2 = 1$ et $\|Te_j\|_{l_\infty^n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\|We_j\|_{l_\infty^n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$
Ainsi $\|z_j\|_{l_\infty^n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$
Donc le (ii) du Théorème 6.5 serait $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq c$ ce qui est absurde.

On peut cependant minorer $\|Tx_j\|_X$. Pour celà, par dualité, il suffit de minorer $| < x_j, Tx_j > |$.
On a le résultat suivant :

Théorème 6.6. *Soit X un espace vectoriel normé de dimension n en position de John.*
Soit T opérateur linéaire avec $\|T\|_{2\to 2} \leq 1$.
Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists x_1, ..x_k$ points de contacts avec $k > (1-\varepsilon)\|T\|_{HS}^2$ tel que

(i) $(Tx_j)_{j\leq k}$ *est $C(\varepsilon)$-équivalente pour la norme l_2 à une base orthonormée de l_2^k.*

(ii) $\|Tx_j\|_X \geq c\varepsilon\frac{|Trace(T)|}{n}$.

Démonstration. Comme on l'a déjà fait remarquer, il suffit d'avoir dans (ii) du Théorème 6.1 $| < x_j, Tx_j > | \geq c\varepsilon\frac{|Trace(T)|}{n}\|x_j\|^2$.
On suit la même démonstration que celle du Théorème 6.1.
En effet, $\displaystyle\sum_{j\leq m} < x_j, Tx_j >= Trace(T)$.
En appliquant la procédure de "split", on peut supposer que
$| < x_j, Tx_j > | \geq 0,9\frac{|Trace(T)|}{m} \quad \forall j \leq m$
On pose $\tau' = \{j \leq m / \ | < x_j, Tx_j > | \geq \frac{\varepsilon}{5}\frac{|Trace(T)|}{n}\|x_j\|^2\}$
Il suffit de montrer que $\tau' \geq (1-\frac{\varepsilon}{3})m$ et continuer exactement de la même façon en utilisant le lemme 6.1.
Si $\|x_j\|^2 \leq \frac{n}{m}.\frac{3}{\varepsilon}$, alors on a $\frac{\varepsilon}{5}.\frac{|Trace(T)|}{n}\|x_j\|^2 \leq | < x_j, Tx_j > |$
Ainsi $\tau' \supset \rho' = \{j \leq m / \ \|x_j\|^2 \leq \frac{n}{m}.\frac{3}{\varepsilon}\}$

$$n = \sum_{j\leq m}\|x_j\|^2 \geq \sum_{j\in\rho'^c}\|x_j\|^2 \geq \frac{3}{\varepsilon}.\frac{n}{m}|\rho'^c|$$

Alors $|\rho'^c| \leq m\frac{\varepsilon}{3}$ et $|\rho'| \geq (1-\frac{\varepsilon}{3})m$
Ainsi $|\tau'| \geq (1-\frac{\varepsilon}{3})m$

Finalement, dans le cas particulier où T est l'identité, on a :

Proposition 6.1. *Soit X un espace vectoriel normé de dimension n en position de John.*
Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists x_1, ..x_k$ des points de contacts avec $k \geq (1-\varepsilon)n$ tel que $(x_j)_{j\leq k}$ est $C(\varepsilon)$-équivalente à une base orthonormée de l_2^k.

Remarques.
Ceci permet de donner une factorisation de $Id : l_2^k \longrightarrow l_\infty^k$ de la forme $Id = \alpha \circ \beta$ où $\alpha : X \longrightarrow l_\infty^k$ et $\beta : l_2^k \longrightarrow X$ avec $\|\alpha\|.\|\beta\| \leq C(\varepsilon)$.
en effet, on a $\frac{1}{C(\varepsilon)}(\sum_{j\leq k} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \| \sum_{j\leq k} a_j x_j\|_2 \leq \| \sum_{j\leq k} a_j x_j\|_{X^*} \leq \sum_{j\leq k} |a_j|$
Ainsi $Id : l_1^k \longrightarrow l_2^k$ se factorise par X^*, et par dualité $Id : l_2^k \longrightarrow l_\infty^k$ se factorise par X avec $\|\alpha\|.\|\beta\| \leq C(\varepsilon)$.
Ce résultat est connu sous le nom de "The proportionnel Dvoretzky-Rogers factorization" et joue un role important dans le calcul de la distance au cube. (voir [9, 3, 6])
Par le Théorème 6.1, on obtient $C(\varepsilon) \leq (\frac{c}{\varepsilon})^{c' log(\frac{1}{\varepsilon})}$ qui est beaucoup moins bien que celle dans [9] où $C(\varepsilon) \leq \frac{c}{\varepsilon^2}$ et améliorée dans [6] pour avoir $C(\varepsilon) \leq \frac{c}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}$.

7 Plongements du cube

Théorème 7.1 (Talagrand). *Soit $(x_j)_{j\leq n}$ suite dans un espace de banach X avec $\|x_j\|_X \geq 1$.*
Soit $M = \mathbb{E}\| \sum_{i\leq n} \varepsilon_i x_i\|_X$ où les ε_i sont des variables aléatoires de Bernouilli $\{\pm 1\}$ indépendantes. Soit $\omega = sup\{\sum_j |x^*(x_j)|/ \ x^* \in B(X^*)\}$.
Alors $\exists\ \sigma \subset \{1, .., n\}$ avec $|\sigma| \geq \frac{n}{64\omega}$ tel que :

$$\frac{1}{2} \max_{j\in\sigma} |a_j| \leq \| \sum_{j\in\sigma} a_j x_j\|_X \leq 4M \max_{j\in\sigma} |a_j|$$

pour toute suite de scalaires $(a_j)_{j\in\sigma}$.

Remarques.
On a donc que $(x_j)_{j\in\sigma}$ est 8M-équivalente à la base canonique de l_∞^σ.

Ce résultat de Talagrand améliore celui d'Alon et Milman qui ont montré sous les même conditions qu'il existe $\sigma \subset \{1,..,n\}$ avec $|\sigma| \geq 2^{-7}\frac{\sqrt{n}}{M}$ tel que $(x_j)_{j\in\sigma}$ est 8M-équivalente à la base canonique de l_∞^σ.
Pour bien voir qu'on a élargit notre ensemble d'indices σ, comparons M et ω.
On a d'abord $\|\sum_i \varepsilon_i x_i\|_X = \sup_{x^*\in B(X^*)} |\sum_i \varepsilon_i x^*(x_i)| \leq \omega$ donc $M \leq \omega$.
D'autre part, si $x^* \in B(X^*)$ alors $M = \mathbb{E}\|\sum_i \varepsilon_i x_i\|_X \geq \mathbb{E}|\sum_i \varepsilon_i x^*(x_i)|$
Par khintchine on a $(\mathbb{E}|\sum_i \varepsilon_i x^*(x_i)|^2)^{\frac{1}{2}} \leq c\mathbb{E}|\sum_i \varepsilon_i x^*(x_i)|$ où c est une constante numérique.
Or $(\mathbb{E}|\sum_i \varepsilon_i x^*(x_i)|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_i |x^*(x_i)|^2)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_i |x^*(x_i)|$ par cauchy-schwartz.
Ainsi $\forall x^* \in B(X^*)$ on a $\sum_i |x^*(x_i)| \leq c\sqrt{n}M$ donc $\omega \leq c\sqrt{n}M$.
$M \leq \omega \leq c\sqrt{n}M$ parsuite $\frac{n}{\omega} \geq c\frac{\sqrt{n}}{M}$.

On va à présent donner quelques lemmes afin de démontrer le théorème 7.1.

Lemme 7.1. *On pose $\delta = \frac{M}{\omega}$. Si $n\delta > 16$ alors $\exists \tau \subset \{1,..,n\}$ avec $|\tau| \geq \frac{nM}{2\omega}$ tel que :*
$\forall x^* \in B(X^*),\ \sum_{i\in\tau} |x^*(x_i)| \leq 4M.$

Démonstration. $M = \mathbb{E}\|\sum_{i\leq n} \varepsilon_i x_i\|_X = \mathbb{E}\sup_{x^*\in B(X^*)} |\sum_{i\leq n} \varepsilon_i x^*(x_i)|$.
Par le théorème 2.1 dans [10] , on a
$\mathbb{E}\sup_{x^*\in B(X^*)} |\sum_{i\leq n} \varepsilon_i |x^*(x_i)|\,| \leq 2M$.
Soit $(\delta_i)_{i\leq n}$ variables aléatoires indépendantes à valeurs dans {0,1} et d'espérance δ.
Soit $(\delta_i')_{i\leq n}$ copie indépendante de $(\delta_i)_{i\leq n}$, et indépendante de $(\varepsilon_i)_{i\leq n}$.
$\delta_i - \delta_i'$ est à valeurs dans {-1,0,1},
donc $\mathbb{E}_\varepsilon \sup_{x^*\in B(X^*)} |\sum_{i\leq n} \varepsilon_i(\delta_i - \delta_i')|x^*(x_i)|\,| \leq 2M$
ainsi $\mathbb{E}\sup_{x^*\in B(X^*)} |\sum_{i\leq n} \varepsilon_i(\delta_i - \delta_i')|x^*(x_i)|\,| \leq 2M$.
or $\delta_i - \delta_i'$ est symétrique alors $\delta_i - \delta_i' \sim \varepsilon_i(\delta_i - \delta_i')$
donc $\mathbb{E}\sup_{x^*\in B(X^*)} |\sum_{i\leq n}(\delta_i - \delta_i')|x^*(x_i)|\,| \leq 2M$

Ainsi $\mathbb{E} \underset{x^*\in B(X^*)}{sup} |\sum_{i\leq n}(\delta_i-\delta)|x^*(x_i)|\,| \leq 2M$.
On a pour $x^*\in B(X^*)$,

$$\begin{aligned}\sum_{i\leq n}\delta_i|x^*(x_i)| &\leq |\sum_{i\leq n}(\delta_i-\delta)|x^*(x_i)|\,| + \delta\sum_{i\leq n}|x^*(x_i)| \\ &\leq \underset{x^*\in B(X^*)}{sup}|\sum_{i\leq n}(\delta_i-\delta)|x^*(x_i)|\,| + \delta\omega\end{aligned}$$

ainsi $\mathbb{E}\sum_{i\leq n}\delta_i|x^*(x_i)| \leq 2M + M = 3M$.
Par Markov, $\mathbb{P}(\sum_{i\leq n}\delta_i|x^*(x_i)| > 4M)4M < \mathbb{E}\sum_{i\leq n}\delta_i|x^*(x_i)| \leq 3M$
donc $\mathbb{P}(\sum_{i\leq n}\delta_i|x^*(x_i)| > 4M) < \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(\sum_{i\leq n}\delta_i|x^*(x_i)| \leq 4M) \geq \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sum_{i\leq n}\delta_i - n\delta)^2 &= \mathbb{E}(\sum_{i,j\leq n}\delta_i\delta_j + n^2\delta^2 - 2n\delta\sum_{i\leq n}\delta_i) \\ &= n\delta + n(n-1)\delta^2 + n^2\delta^2 - 2n^2\delta^2 \\ &= n\delta - n\delta^2 \\ &\leq n\delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sum_{i\leq n}\delta_i < \frac{n\delta}{2}) &= \mathbb{P}(\sum_{i\leq n}\delta_i - n\delta < -\frac{n\delta}{2}) \\ &\leq \mathbb{P}((\sum_{i\leq n}\delta_i - n\delta)^2 > \frac{n^2\delta^2}{4}) \\ &< \frac{4}{n^2\delta^2}\mathbb{E}(\sum_{i\leq n}\delta_i - n\delta)^2 \qquad \textit{par Markov} \\ &\leq \frac{4}{n\delta}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(\sum_{i\leq n}\delta_i \geq \frac{n\delta}{2}) \geq 1 - \frac{4}{n\delta}$.
Si $n\delta > 16$, on a $\mathbb{P}(\sum_{i\leq n}\delta_i \geq \frac{n\delta}{2}) > \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sup_{x^*\in B(X^*)}\sum_{i\leq n}\delta_i|x^*(x_i)|\leq 4M \textit{ et } \sum_{i\leq n}\delta_i\geq\frac{n\delta}{2})\geq 1-\mathbb{P}(&\sup_{x^*\in B(X^*)}\sum_{i\leq n}\delta_i|x^*(x_i)|\leq 4M)-\\ &\mathbb{P}(\sum_{i\leq n}\delta_i\geq\frac{n\delta}{2})\\ &>1-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\\ &>0\end{aligned}$$

Ainsi il existe un choix des δ_i tel que :
$\sup_{x^*\in B(X^*)}\sum_{i\leq n}\delta_i|x^*(x_i)|\leq 4M$ et $\sum_{i\leq n}\delta_i\geq\frac{n\delta}{2}$.
Soit alors $\tau=\{i\leq n/\ \delta_i=1\}$.
$|\tau|=\sum_{i\leq n}\delta_i\geq\frac{n\delta}{2}$ et $\sup_{x^*\in B(X^*)}\sum_{i\in\tau}|x^*(x_i)|\leq 4M$.

Lemme 7.2. *Soit $(x_i)_{i\leq m}$ suite dans un espace de banach X avec $\|x_i\|\geq 1$.
Soit $Z_m=\sup_{x^*\in B(X^*)}\sum_{i\leq m}|x^*(x_i)|$.
Alors $\exists\sigma\subset\{1,..,m\}$ avec $|\sigma|\geq\frac{m}{8Z_m}$ tel que $\|\sum_{i\in\sigma}a_ix_i\|_X\geq\frac{1}{2}\max_{i\in\sigma}|a_i|$ pour toute suite de scalaires $(a_i)_{i\in\sigma}$.*

Démonstration. Soit $\alpha=\frac{1}{4Z_m}$.
Soit $(\delta_i)_{i\leq m}$ variables aléatoires indépendantes à valeurs dans {0,1} d'espérance α.
Soit $(x_i^*)_{i\leq m}$ suite de X^* tel que $\|x_i^*\|=1$ et $|x_i^*(x_i)|\geq 1$.

$$\mathbb{E}\sum_{i\neq j}\delta_i\delta_j|x_i^*(x_j)|=\alpha^2\sum_{i\neq j}|x_i^*(x_j)|\quad\leq\alpha^2\sum_{i,j\leq n}|x_i^*(x_j)|=\alpha^2\sum_i\sum_j|x_i^*(x_j)|\quad\leq\alpha^2 mZ_m=\frac{m\alpha}{4}$$

Donc $(\mathbb{E}\sum_{i\leq m}\delta_i-2\mathbb{E}\sum_{i\neq j}\delta_i\delta_j|x_i^*(x_j)|)\geq m\alpha-\frac{m\alpha}{2}=\frac{m\alpha}{2}$.
Il existe alors un choix des δ_i tel que $\sum_{i\leq m}\delta_i-2\sum_{i\neq j}\delta_i\delta_j|x_i^*(x_j)|\geq\frac{m\alpha}{2}$.

Soit $I = \{i \leq m/ \ \delta_i = 1\}$. On a donc $card(I) - 2\sum_{\substack{i,j\in I\\ i\neq j}} |x_i^*(x_j)| \geq \dfrac{m\alpha}{2}$ ou encore $\sum_{i\in I}(1 - 2\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} |x_i^*(x_j)|) \geq \dfrac{m\alpha}{2}$.

Comme $card(I) \geq \frac{m\alpha}{2}$ et que les termes de la somme sont ≤ 1 alors au moins $\frac{m\alpha}{2}$ termes sont positifs.

Soit $\sigma = \{i \in I/ \ \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} |x_i^*(x_j)| \leq \dfrac{1}{2}\}$. On a $|\sigma| \geq \frac{m\alpha}{2} = \frac{m}{8Z_m}$.

Soit $(a_j)_{j\in\sigma}$ suite de scalaires. Soit $i \in \sigma$ tel que $|a_i| = \underset{j\in\sigma}{max}|a_j|$.

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j\in\sigma} a_j x_j\| &\geq |\sum_{j\in\sigma} a_j x_i^*(x_j)| \\
&\geq |a_i|.|x_i^*(x_i)| - \sum_{\substack{j\in\sigma\\ j\neq i}} |a_j|.|x_i^*(x_j)| \\
&\geq |a_i|(1 - \sum_{\substack{j\in\sigma\\ j\neq i}} |x_i^*(x_j)|) \\
&\geq \frac{1}{2}|a_i| \\
&= \frac{1}{2}\underset{j\in\sigma}{max}|a_j|
\end{aligned}$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème 7.1.

Démonstration.(Théorème 7.1)

Si $n \leq 32\omega$, il suffit de prendre $\sigma = \{1\}$.

Si $n \geq 32\omega$, alors $nM \geq 32\omega$.

Par le lemme (7.1), $\exists \tau \subset \{1, .., n\}$ avec $|\tau| = m \geq \frac{nM}{2\omega}$ tel que :

$\forall x^* \in B(X^*)$, $\sum_{i\in\tau} |x^*(x_i)| \leq 4M$.

On a donc $|\sum_{i\in\tau} a_i x^*(x_i)| \leq \underset{i\in\tau}{max}|a_i|. \sum_{i\in\tau} |x^*(x_i)| \leq 4M\underset{i\in\tau}{max}|a_i|$.

D'où $\|\sum_{i\in\tau} a_i x_i\|_X \leq 4M\underset{i\in\tau}{max}|a_i|$

Par le lemme (7.2), $\exists \sigma \subset \tau$ avec $|\sigma| \geq \frac{|\tau|}{8Z} \geq \frac{|\tau|}{32M} \geq \frac{n}{64\omega}$ tel que :

$$\|\sum_{i\in\sigma} a_i x_i\|_X \geq \frac{1}{2}\max_{i\in\sigma}|a_i|.$$

A présent, on va essayer de combiner le Théorème 7.1 avec le Théorème 6.1 pour obtenir des plongements de l_∞^k.
Pour X un espace de Banach et $u : l_2^k \longrightarrow X$, on notera $l(u)^2 = \int \|ux\|_X^2 d\gamma_n(x)$ où γ_n est la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^n$.
On notera $l(X)$ au lieu de $l(Id_X)$.

Proposition 7.1. *Soit X un espace vectoriel normé de dimension n en position de John.*
Alors $\exists (x_j)_{j\leq m}$ des points de contacts avec $m \geq c_1\sqrt{n}$ tel que

$$\frac{1}{2}\max_{j\leq m}|a_j| \leq \|\sum_{j\leq m} a_j x_j\|_X \leq c.l(X)\max_{j\leq m}|a_j|$$

pour toute suite de scalaires $(a_j)_{j\leq m}$.
c.à.d $(x_j)_{j\leq m}$ est $c.l(X)$-équivalente à la base canonique de l_∞^m.

Démonstration. Par la proposition 6.1 avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists x_1, ..x_k$ des points de contacts avec $k \geq \frac{n}{2}$ tel que $(x_j)_{j\leq k}$ est c-équivalente pour la norme l_2 à la base canonique de l_2^k.
Pour appliquer le Théorème 7.1, estimons d'abord M et ω.

$$\begin{aligned} M &= \mathbb{E}\|\sum_{j\leq k} \varepsilon_j x_j\|_X \\ &\leq c\mathbb{E}\|\sum_{j\leq k} g_j x_j\|_X \quad \textit{où } g_j \textit{ sont des varibales gaussiennes standards indépendantes} \\ &\leq c.c_2\mathbb{E}\|\sum_{j\leq k} g_j e_j\|_X \quad e_j \textit{ étant la base canonique} \\ &\leq c.c_2.l(X) \end{aligned}$$

$$\omega = sup\{\sum_{j\leq k} |x^*(x_j)|/\ x^* \in B(X^*)\}$$

Soit $x^* \in B(X^*)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\le k} |x^*(x_j)| &= \sum_{j\le k} a_j x^*(x_j) \quad \textit{pour } a_j = \frac{\overline{x^*(x_j)}}{|x^*(x_j)|} \\
&\le \| \sum_{j\le k} a_j x_j \|_X \\
&\le \| \sum_{j\le k} a_j x_j \|_2 \quad \textit{car } X \textit{ en position de John} \\
&\le c(\sum_{j\le k} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \quad \textit{car } (x_j)_{j\le k} \textit{ est c-équivalente à la base canonique de } l_2^k \\
&\le c\sqrt{n}
\end{aligned}$$

Ainsi $\omega \le c\sqrt{n}$
On applique maintenant le Théorème 7.1,
alors $\exists (x_j)_{j\le m}$ avec $m \ge c\frac{n}{\omega} \ge c\sqrt{n}$ tel que

$$\frac{1}{2}\max_{j\le m}|a_j| \le \| \sum_{j\le m} a_j x_j \|_X \le 4M\max_{j\le m}|a_j| \le c.l(X)\max_{j\le m}|a_j|$$

Proposition 7.2. *Soit X un espace vectoriel normé de dimension n en position de John.*
Soit P une projection orthogonale de rang k.
Alors il existe $(x_j)_{j\le m}$ des points de contacts avec $m \ge c_1\frac{k}{\sqrt{n}}$ tel que $(\frac{Px_j}{\|Px_j\|_2})_{j\le m}$ est $c\sqrt{\frac{n}{k}}.l(P)$-équivalente à la base canonique de l_∞^m.

Démonstration. Par le Théorème 6.5, $\exists (x_j)_{j\le s}$ des points de contacts avec $s = \frac{k}{2}$ tel que si $z_j = \frac{Px_j}{\|Px_j\|_2}$ on a :
$(z_j)_{j\le s}$ est c-équivalente pour la norme l_2 à une base orthonormée de l_2^s et $\|z_j\|_X \ge c\sqrt{\frac{k}{n}}$
On considère $y_j = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{n}{k}} z_j\,;\ \ \|y_j\|_X \ge 1$.
On peut appliquer le Théorème 7.1 à $(y_j)_{j\le s}$, pour celà estimons M et ω.

Soit $x^* \in B(X^*)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\le k}|x^*(y_j)| &= \sum_{j\le s} a_j x^*(y_j) \quad \textit{avec } a_j = \frac{\overline{x^*(y_j)}}{|x^*(y_j)|}\\
&\le \|\sum_{j\le s} a_j y_j\|_X\\
&\le \|\sum_{j\le s} a_j y_j\|_2\\
&\le c(\sum_{j\le s}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}}\\
&= c\sqrt{n}
\end{aligned}$$

Ainsi $\omega \le c\sqrt{n}$.

$$\begin{aligned}
M &= \mathbb{E}\|\sum_{j\le s}\varepsilon_j y_j\|_X\\
&\le c\mathbb{E}\|\sum_{j\le s} g_j y_j\|_X \quad \textit{où } g_j \textit{ sont des variables gaussiennes standards indépendantes}\\
&\le c\sqrt{\frac{n}{k}}\mathbb{E}\|\sum_{j\le s} g_j f_j\|_X \quad \textit{où } f_j \textit{ base orthonormée de } vect(z_j)_{j\le s}\\
&= c\sqrt{\frac{n}{k}}l(P)
\end{aligned}$$

Ainsi par le Théorème 7.1, on a
$\exists (y_j)_{j\le m}$ avec $m \ge c\frac{s}{\omega} \ge c\frac{k}{\sqrt{n}}$ tel que

$$\tfrac{1}{2}\max_{j\le m}|a_j| \le \|\sum_{j\le m} a_j y_j\|_X \le 4M\max_{j\le m}|a_j| \le c\sqrt{\frac{n}{k}}l(P)\max_{j\le m}|a_j|$$

Donc $(y_j)_{j\le m}$ est $c\sqrt{\frac{n}{k}}l(P)$-équivalente à la base canonique de l_∞^m, alors il en est de même pour $(z_j)_{j\le m}$.

Remarques. En appliquant la proposition 7.2 à $P = Id$, on retrouve la proposition 7.1.

Proposition 7.3. *Soit X un espace vectoriel normé de dimension n en position de John.*

Soit P une projection orthogonale de rang k.
Alors $\exists (x_j)_{j\leq m}$ des points de contacts avec $m \geq c\frac{k}{\sqrt{n}}$ tel que

$$\max_{j\leq m} |<x, x_j>| \leq \|x\|_X \leq c\sqrt{\frac{n}{k}}\, l(P) \max_{j\leq m} |<x, x_j>|$$

pour tout $x \in vect(Px_j)_{j\leq m}$.

Démonstration. En suivant les même notations que dans la proposition 7.2, on a :
$\|x_j\|_{X^*} = 1$ et $<x_j, y_j> = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{n}{k}} <x_j, z_j> = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{n}{k}}\|Px_j\|_2 \geq 1$ car $\|Px_j\|_2 \geq c\sqrt{\frac{k}{n}}$ par le Théorème 6.5.
Ainsi par la preuve du lemme 7.2 , on peut choisir les $(y_j)_{j\leq m}$ avec $m \geq c\frac{k}{\sqrt{n}}$ tel qu'en plus on a $\sum_{\substack{j\leq m\\ j\neq i}} |<x_j, y_j>| \leq \frac{1}{2} \quad \forall i \leq m$.
Soit $x \in vect(Px_j)_{j\leq m}$; $x = \sum_{l\leq m} a_l y_l$.
Soit $i \leq m$ tel que $|a_i| = \max_{l\leq m} |a_l|$

$$\begin{aligned}
\|x\|_X &= \|\sum_{l\leq m} a_l y_l\|_X \\
&\leq c\sqrt{\frac{n}{k}}\, l(P)|a_i| \qquad \textit{par la proposition 7.2} \\
&\leq 2c\sqrt{\frac{n}{k}}\, l(P)|a_i|.(|<x_i, y_i>| - \sum_{l\neq i} |<x_i, y_l>|) \\
&\leq c'\sqrt{\frac{n}{k}}\, l(P).(|<x_i, a_i y_i>| - \sum_{l\neq i} |<x_i, a_l y_l>|) \\
&\leq c'\sqrt{\frac{n}{k}}\, l(P).(|<x_i, a_i y_i>| - |\sum_{l\neq i} <x_i, a_l y_l>|) \\
&\leq c'\sqrt{\frac{n}{k}}\, l(P)|<x_i, \sum_{l\leq m} a_l y_l>| \\
&\leq c'\sqrt{\frac{n}{k}}\, l(P) \max_{j\leq m} |<x, x_j>|
\end{aligned}$$

D'autre part, $\forall j \leq m$ on a $| < x, x_j > | \leq \|x\|_X$
Ainsi $\max_{j \leq m} | < x, x_j > | \leq \|x\|_X \leq c' \sqrt{\frac{n}{k}} l(P) \max_{j \leq m} | < x, x_j > |$

Références

[1] K. Ball. Ellipsoids of maximal volume in convex bodies. *Geom. Dedicata*, 41 :241–250, 1992.

[2] K. Ball. An elemantary introduction to modern convex geometry. *Flavors of Geometry, MSRI*, 31, 1997.

[3] J. Bourgain and S. Szarek. The banach-mazur distance to cube and the dvoretzky-rogers factorization. *Israel J.Math*, 62 :169–180, 1988.

[4] J. Bourgain and L. Tzafriri. Invertibility of "large" submatrices with applications to the geometry of banach spaces and harmonic analysis. *Israel J.Math*, 62 :169–180, 1988.

[5] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge. *Absolutely summing operators*. Cambridge University Press, 1995.

[6] A. Giannopoulos. A note on the banach-mazur distance to the cube. In *GAFA Seminar*, volume 77, pages 67–73, Birkhauser, Basel, 1995. Oper. Theory Adv. Appl.

[7] M. Ledoux and M. Talagrand. *Probability in Banach spaces*. Springer, 1991.

[8] M. Rudelson. Estimates of the weak distance between finite-dimensional banach spaces. *Israel J.Math*, 89 :189–204, 1995.

[9] S. Szarek and M. Talagrand. An "isomorphic" version of the sauer-shelah lemma and the banach-mazur distance to the cube. In *GAFA Seminar 87-88*, volume 1376, pages 105–112. Springer Lecture Notes in Math, 1989.

[10] M. Talagrand. Regularity of infinitely divisible processes. *Ann. Probab.*, 21 :362–432, 1993.

[11] M. Talagrand. Embedding of l_∞^n and a theorem of alon and milman. In *GAFA (Israel 1992-1994)*, volume 77, pages 289–293, Birkhauser, Basel, 1995. Oper. Theory Adv. Appl.

[12] R. Vershynin. John's decompositions : selecting a large part. *Israel J.Math*, 122 :253–277, 2001.